

國立中央大學八十四學年度碩士班研究生入學試題卷

所別：地球物理研究所
所別：應用地質研究所

科目：微積分

共 2 頁 第 1 頁

參考用

1. 試證明下列積分： (每小題 5 分, 共 25 分)

1) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2}$

3) $\int_0^{\infty} \sin x dx = 1$

4) $\int \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{x+a}} dx = (x+a) \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{x+a}} - \sqrt{ax} + C$

5) $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C$

2. 試討論並繪出下列各公式之圖形： (每小題 5 分, 共 25 分)

1) $y = \frac{\sin x}{x}$

2) $y = e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$

3) $y = \sin^2 x - \cos x \quad (x: 0 \rightarrow 2\pi)$

4) $r = a \cos n\theta \quad (a > 0, n \in \mathbb{I})$

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad (a, b, c > 0)$

3. 試求一均勻半橢球體： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; z > 0$

1) 體積

(每小題 5 分, 共 15 分)

2) 質心

3) 若 $a=b=c$, 試以面積分, 求其表面積。

4. 1) 試比較邊形積分法中之 trapezoidal rule & Simpson's rule

2) 若 $\frac{df(x)}{dx}$ 之差分表為 $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, 試以差分表示 $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$

3) 已知 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, 試求 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$.

(每小題 5 分, 共 15 分)

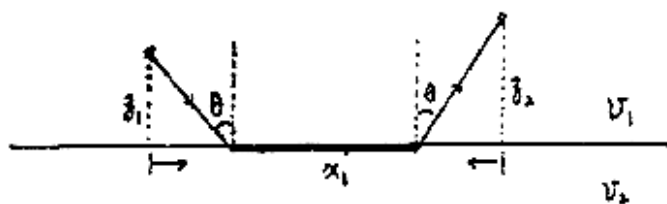
國立中央大學八十四學年度碩士班研究生入學試題卷

所別：地球物理研究所
所別：應用地質研究所

科目：微積分

共 2 頁 第 2 頁

5. 所謂 Fermat 原理是指從一英到另一英所花時間最少者為其路徑。下圖為一折射波之路徑： (10分)



($v_2 > v_1$)
v: 速度

試証 $\sin \theta = \frac{v_1}{v_2}$

6. 一表面密度為 σ 之薄板所引起之垂直重力場 g_z 可表為

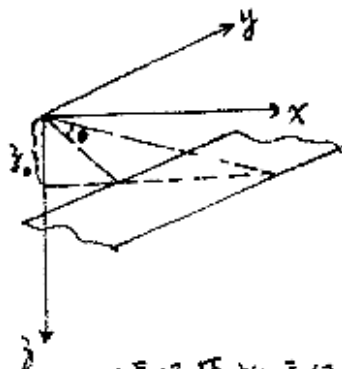
$$g_z = \iint_A \frac{G \sigma \delta}{r^3} dA \quad (10分)$$

式中 G 為萬有引力常數
 r 為 dA 到測點之距離
 δ 為 r 在垂直方向之投影。

- 試証一無限長條薄板(如圖所示)之垂直重力場為

$$g_z = 2G\sigma\theta$$

式中 θ 為張角。



(長條薄板平行 $x-y$ 面,
側邊平行 z 軸)