

# 國立中央大學八十六學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 太空科學研究所 不分組 科目: 應用數學 共一頁 第一頁

參考用

[16%] 1. 已知  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 試求下列偏微分, 並將答案表成  $r, \theta$  之函數。

(a)  $\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)_y$       (b)  $\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x$       (c)  $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y$       (d)  $\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)_x$

[20%] 2. 求解下列微分方程式

(a)  $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} - y = x^2$       (b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2 + 3x^2y}{1 - 2xy - x^3}$

[18%] 3. 將原函數  $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 < x < L/2 \\ 1-x & x > L/2 \end{cases}$  在區間  $(-L, L)$  展成週期為  $2L$  之

Fourier's series, 並分別繪出此 Fourier's series 及原函數在  $(-3L, 3L)$  間的曲線圖。

4. 利用留數定理 (Residue theorem) 求下列定積分之值

[8%] (a)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B \sin \theta}$  (where  $-A > |B|$ )

[8%] (b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2} dx$

5. 已知一向量以圓柱座標表示為  $\vec{A} = \frac{K}{r} \hat{c}_\theta$  ( $K$  為常數)

[5%] (a) 求  $\nabla \times \vec{A}$  之值。

[10%] (b) 求線積分  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$  之值。在此曲線  $C$  為位在  $z=0$  平面上的一橢圓

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 積分方向為逆時鐘方向。

[15%] 6. 試求下列恆等式中  $A, B, C$  之形式。並請繪圖說明之。

$$\int_0^6 \left[ \int_{\frac{y+2}{2}}^4 f(x, y) dx \right] dy + \int_{-3}^0 \left[ \int_{1-y}^4 f(x, y) dx \right] dy = \int_C \left[ \int_A^B f(x, y) dy \right] dx$$