國立中央大學九十學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 天文研究所 不分組 科目: 物理學 共二頁 第一頁

五題全作、每題20分

一、質量為 m 之行星環繞太陽(其質量為 M)作圓形軌道之運動。由於太陽質量 M 遠大於行星質量 m (即 $M>>m$) 故太陽之運動可以忽略不計。試證 (a) 此圓形運動之周期(即旋轉一圈所需時間)之平方與軌道半徑之立方成比例,(b) 如果 K, U 與 E 分別依次表示行星之動能,位能與總能,試證 $K=-\frac{1}{2}U$, $E=\frac{1}{2}U$ 且問此總能之值究竟是正數或負數?其物理意義為何?

二、根據愛因斯坦特殊相對論,一高速運動之粒子,其動量 $\vec{p}$、能量 E 可分別寫成

$$\vec{p}=\gamma m\vec{v}\ ,\quad E=\gamma mc^2$$

$$\gamma=\left\{1-\frac{v^2}{c^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

上列各式中之 m 為粒子之靜止質量(rest mass),$\vec{v}$ 表示粒子速度,c 為真空中之光速。假設此粒子不受任何外力作用,即所謂相對性自由粒子(*relativistic free particle*),試證此自由粒子之動量與能量滿足

(a) $E^2=c^2(\vec{p}\cdot\vec{p})+m^2c^4$,

(b) $\vec{v}=\left\{p^2c^2+m^2c^4\right\}^{-1/2}c^2\vec{p}$

設有一粒子其靜止質量為零,問其能量 E 及速度 $\vec{v}$ 為何?

三、何謂絕熱過程 *adiabatic process*?試證理想氣體在絕熱過程中滿足

$$PV^{\gamma}=K$$

上式中 P 及 V 表示氣體壓力及體積,K 為一常數。$\gamma=C_p/C_v$ 為定壓比熱與定容比熱之比,且證明

$$C_p=C_v+R\ (1\ mole,\ R\text{ 為氣體常數})$$

注意:背面有試題

四. 根據 Rutherford 之原子模型,原子由原子核及電子所構成。原子核帶正電 Ze ($e>0$, Z 為原子核中含有質子之數目),整個原子核可視為一個粒子,位於均勻球形分布電子雲之中心,電子雲之總帶電量為 $-Ze$ 以維持原子之電中性。假設電子雲之半徑為 a,利用高斯定理 (Gauss's Law) 證明在距離中心 r 處之電場為

(a) $E = 0 \quad (r > a)$

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{a^3}\right] \quad (r < a)$$

上式中之 ϵ_0 滿足 $(4\pi\epsilon_0)^{-1} \simeq 9\times10^9\ Nm^2/C^2$ 乃由 MKS 單位所定出。參加考試同學如不習慣 MKS 單位請隨意運用別種單位。

並證明在離中心 r 處之電位為

(b) $V = 0 \quad (r > a)$

$$V = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{3}{2a} + \frac{r^2}{2a^3}\right] \quad (r < a)$$

五. 一帶電粒子,其電荷為 q,在均勻且彼此互相垂直之電場 $\vec{E} = E\hat{y}$ 與磁場 $\vec{B} = B\hat{z}$ 中運動,假定此粒子之初速度為零,由座標原點開始運動,由牛頓運動定律及帶電粒子在電磁場中所受之 Lorentz 力,寫出此粒子之運動方程式,解出所得之運動方程式,定出粒子之運動軌道 ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 為單位向量)。令 m 為此帶電粒子之質量

如果只有磁場 $\vec{B} = B\hat{z}$,而無電場 $\vec{E} = 0$,但帶電粒子之初速度為 $\vec{V} = V\hat{x}$ (V 為常數),則其軌道為何? 在此情形下問粒子之動能是否為常數,並計算粒子之磁矩 magnetic moment $\vec{\mu}$ 及其角動量 $\vec{L}$ 並證 μ/L 為常數。

注意 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 為正交單位向量,即 $\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$, $\hat{x}\cdot\hat{z} = 0$, $\hat{y}\cdot\hat{y} = 1$ 等等關係式!