

國立中央大學九十學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 數學系 不分組 科目: 離散數學 共 1 頁 第 1 頁

(任選五題 每題 20 分)

1. 證明或否證 $n(n+1)2^{n-2} = C(n,1) + 2^2 C(n,2) + \dots + n^2 C(n,n)$.
2. 學號從一到十號的十位學生，分別隨意坐在編號從一到十的座位上，規定若要交換座位，只能由坐在一號座位的同學與別人交換。若想要讓學號與座號一致，請問要交換多少次才保證能辦得到？
3. 有一種稱為 Nim like game 的二人遊戲玩法如下：
 - 甲乙輪流在幾堆個數不一的石頭堆中，選定一堆，移去其中若干顆
 - 規定每回要在其選定的一堆中，至少移走一個石頭
 - 甲先開始，且最早將全部石頭搬完的為勝方
 - 假設原本有六堆石頭，個數分別為 4,5,6,7,8,9 個。問甲或乙哪一個人有必勝秘訣？其策略為何？
4. $m < n$ 為二正整數。若 $m \times n$ 長方阵 L 其中的元素皆為介於 1 到 n 中間的正整數，且每行、每列的元素都不相同。試問 " 是否有辦法將 L 添上 $n-m$ 列，成為一 n 階方阵 L' ，使 L' 中的元素皆為 1 到 n 中間的正整數，且每行、每列的元素都不相等？" 為甚麼？
5. 何謂 Burnside Lemma？試用 Burnside Lemma 計算有多少種非同構、有五個頂點的無標記無向圖 (unlabelled undirected simple graph)？
6. 若將滿足以下條件的平面圖稱為 r -多邊形平面圖
 - a. 通過每一點的邊數都相等，
 - b. 每一平面區域 (包含無窮遠點的區域也算在內) 皆為 r 邊形。

證明或否證滿足這樣條件的平面圖只有五種。