所別：環境工程研究所碩士班 甲組 乙組 科目：工程數學

1. (25%)

現有一函數

$$f(x,y)=\begin{cases} 2\sqrt{x^2+2y^2} & (x,y)\neq(1,2) \\ 4 & (x,y)=(1,2) \end{cases}$$

(1) 判斷並解釋$f(x,y)$在(0,0)及(1,2)處是否可微分(differentiable)?

(2) 已知$f(x,y)=3$ 表示一"等函數值"之曲線。求在點(1,2)處曲線所對應的法向導數(normal derivative)，以及使函數值下降最快的方向。

(3) $z^2=3+f(x,y)$ 表示在三度實數空間中的曲面。求此曲面在點(1,2,-3)處的切平面方程式，及其法線與下列直線間的夾角。

$$\frac{x-1}{3}=\frac{z+2}{2}, \quad y=4$$

2. (25%)

考慮以下矩陣系統(**Ax=b**)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ -5 & 2 & -5 & 4 \\ -3 & -4 & 7 & -2 \\ 3 & -7 & 15 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(1) 求解未知向量 **x**。

(2) 上列矩陣 **A** 中的四個行向量（column vector）是否互爲線性獨立（linearly independent）？請說明原因。

(3) 上列矩陣 **A** 所屬的向量空間（vector space），其維度（dimension）爲何？

3. (25%)

以下方程為 Bessel's equation of order ν：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0,$$

其級數解可表示為 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}$。已知此方程的一個特殊解的係數 a_n 滿足以下關係式：

$$\begin{cases} a_{2m}=\dfrac{(-1)^m\,\Gamma(\nu+1)}{A_m\,\Gamma(\nu+m+1)}a_0 & (m=1,2,3,\ldots) \\ a_{2m-1}=0 & (m=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

此表示式中 Γ 代表 gamma function，而且滿足 $\Gamma(\nu+m+1)=(\nu+m)\Gamma(\nu+m)$, $\Gamma(\nu+m)=(\nu+m-1)\Gamma(\nu+m-1)$ 等關係式，請問 $A_m=?$

注意：背面有試題

所別：環境工程研究所碩士班 甲組 乙組 科目：工程數學

4. (25%)

考慮正方形區域 $R=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$。此區域中的一個熱傳導問題的控制方程 (EQ.)，邊界條件 (B.C.) 和初始條件 (I.C.) 分別為

$$\text{EQ.}: \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\text{B.C.}: u(0,y,t)=u(1,y,t)=0 \quad \text{for } 0\le y\le 1,\ t\ge 0$$

$$u(x,0,t)=u(x,1,t)=0 \quad \text{for } 0\le x\le 1,\ t\ge 0$$

$$\text{I.C.}: u(x,y,0)=xy(1-x^2)(1-y) \quad \text{for } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$$

已知此問題的解在正方形中央 $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 處可表示成

$$u\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{48}{\pi^6 n^2 m^2}\cdot(-1)^{\frac{3n-1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\left[(-1)^n-1\right]\cdot h_{mn}(t)\right\},$$

其中 m 和 n 皆為奇數，也就是 $m=1,3,5,\ldots$ $n=1,3,5,\ldots$。請問 $h_{mn}(t)=?$