

所別：土木工程學系碩士班 戊組科目：工程數學

共四題，各題配分如題所示，總分為100分

1. 函數 $f(x)$ 為一以 2π 為週期之函數， $f(x)$ 以傅立葉級數表示：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(1) 試求 $f(x)$ 的平均值 $\overline{f(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = ?$ (15分)

(2) 試證明 $f(x)$ 的變異量 (Variance)

$$\overline{[f(x) - \overline{f(x)}]^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \overline{f(x)}]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \quad (15分)$$

2. 試解一維的擴散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, t > 0)$$

初始條件為： $C(x, t) = x$ ($0 < x < L, t = 0$)

邊界條件為： $\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$ ($t > 0$)

(20分)

3. 試求以下一階常微分方程式之解 $y(x)$ 為何？(25分)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 2y}$$

給定 $x=0, y=0$

4. (1) 求解 $\frac{d^2 z}{dt^2} = B - A \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$ ，給定 $t=0, z=0$ 且 $\frac{dz}{dt} = 0$ 。(15分)
 $B > 0, A > 0$

(2) 求 $t \rightarrow \infty$ 時， $\frac{dz}{dt} = ?$ (10分)

參
考
用