

系所別： 土木工程學系 戊組 科目： 工程數學

共五題，各題配分如題所示，總分為100分

1. 計算  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = ?$ ,  $a > 0$  (15分)

2. 卡氏座標的拉普拉斯運算元(Laplacian operator)為

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

卡氏座標與球面座標之間的轉換為：

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta$$

試推導球面座標的拉普拉斯運算元？(20分)

3. 一階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2$$

邊界條件  $y(0) = 2$ ，試求其解？(15分)4. 試求以下二階常微分方程式之解  $y(x)$  為何？(25分)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a - b \frac{dy}{dx}$$

 $a, b$  為常數 ( $> 0$ )。邊界條件： $y(0) = 0$ ,  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$ 。

5. 已知  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = axt \\ \frac{dy}{dt} = -ayt \end{cases}$ ， $a$  為常數。邊界條件： $t = 0$ ,  $(x, y) = (x_0, y_0)$ 。

試求  $x, y$  之解 及  $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  之值。(25分)

參考用