

# 立中央大學八十九學年度碩士班研究生入學試題卷

別： 統計研究所 不分組 科目：

基礎數學

共一頁 第一頁

1. 假設  $A$  為一 idempotent 矩陣，試證明 (15%)

a.  $A^r = A$ ， $r$  為正整數。

b.  $(I - A)$  為 idempotent 矩陣，其中  $I$  為 identity 矩陣。

c. 如果  $A$  也是對稱矩陣，則其 eigenvalue 不是 1 便是 0。

2. 假設  $A$  為  $n \times p$  矩陣且  $\text{rank}(A) = p < n$ ，請證明  $A^T A$  為一正定 (positive definite) 矩陣。 (15%)

3. 求下列之極限值 (15%)

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \alpha x)}{x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^c}{x^b}$ ， $b, c > 0$ 。

4.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$  (25%)

a. 求在  $x = 0, y = 0$  處  $f(x, y)$  對  $x$  及對  $y$  的偏導數分別為何。

b. 證明  $f(x, y)$  在  $x = 0, y = 0$  處不可微。

5. 定義  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ， $\alpha > 0$  (30%)

a. 證明  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ 。

b. 求  $\Gamma(5)$  值。