

國立中央大學98學年度碩士班考試入學試題卷

所別：財務金融學系碩士班 甲組 科目：統計 共 1 頁 第 1 頁

乙組

*請在試卷答案卷(卡)內作答

統計學

說明：題意不清處請自行作假設，但需說明你的假設。未列示推理或推導過程者一律不以計分。

1. (30%) 已知一瓶中有 10 個球，有黑球與白球若干。你可從瓶中抽出 5 個球，而你的報酬 (Payoff) 就是黑球與白球數目的差距，亦即

$$\text{Payoff} = N_B - N_W,$$

上式中 N_B, N_W 分別代表黑球與白球的數目。請回答以下問題：

- (a) (10%) 若黑球、白球各有五個。請問你的報酬的期望值與變異數分別為何？
 (b) (20%) 若黑球、白球數目不詳。只知黑球數目為 1 至 10 的機率都相等，亦即 $Pr(N_B = i) = \frac{1}{10}, i = 1, \dots, 10$ 。請問你報酬的期望值與變異數分別為何？
2. (20%) 你去參加一個益智有獎節目的遊戲，內容說明如下：有三個門，其中一個門後的獎項是豪宅一間，另二個門後是蘋果一顆。你可從三個門中挑一個門。假如你挑了一個門後，主持人看了一下剩下的二個門其中的一扇門，告訴你那扇門的門後是蘋果，並讓你選擇要不要換門。你要換嗎？
- (a) (10%) 假設他沒有說謊，請分別計算換與不換門抽中豪宅的機率為何。
 (b) (10%) 假設他說謊的機率是 50%，請分別計算換與不換門抽中豪宅的機率為何。
3. (10%) 若 X 與 Y 為兩取值為正的隨機變數而且 $E[Y|X] = \beta X$ ，其中未知參數 β 描述 Y 的期望值如何隨 X 變動。今有 $\hat{\beta} = (1/T) \sum_{i=1}^T \frac{Y_i}{X_i}$ 與 $\bar{\beta} = \bar{Y}/\bar{X}$ 兩個估計式， \bar{X} 表示 X 的樣本平均數。試問在任一組樣本數為 T 的隨機樣本 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^T$ 下，哪一個估計式是不偏 (unbiased) 估計式？為什麼？
4. (10%) 假設隨機變數 X 與 Y 在 $0 < x < y < 1$ 的取值域中的聯合分配如下：

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \lambda x & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

試分別解出 X 與 Y 的變異數及其共變異數。

5. (20%) 坊間基金多宣稱自家基金經理人之專業能力及其基金經營之獲利績效優於大盤指數。
- (a) (10%) 假設以過去 10 年為樣本期間，鎖定某週刊所訪調國內的 250 檔各類基金為母體，若這些基金績效優於大盤與否實為隨機的，試算至少有一檔基金 10 年來績效皆優於大盤指數的機率。
- (b) (10%) 可得知過去十年來某檔基金 (Frate) 與市場指數 (Mrate) 扣除無風險利率之後的超額報酬率 (%) 分別如下。

| | | | | | | | | | | |
|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| Frate | -16.6 | 32.5 | -1.9 | 52.9 | 13.5 | 13.6 | -7.6 | -4.5 | -34.9 | -28.2 |
| Mrate | -13.9 | 11.5 | -0.2 | 14.6 | 4.4 | -0.2 | 3.7 | 1.3 | -22.8 | -28.6 |

今若以一簡單迴歸模型

$$\text{Frate}_t = \alpha + \beta \text{Mrate}_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, 10,$$

對該基金是否真的具備專業能力能夠擊敗市場大盤指數進行假設檢定，請具體寫下欲驗證模型參數之虛無假設以及決策法則。

6. (10%) 對兩任意隨機變數 X 和 Y ，已知 $E[Y^2] < \infty$ ，試驗證 $\text{Var}[Y] \leq E[\text{Var}(Y|X)]$ 之真偽，並詳述其緣由。

參考用