

科目：數值分析(1003)

校系所組：中央大學數學系(乙組)

以下題目共有五題，每題 20 分，各小題的分數平均分配。

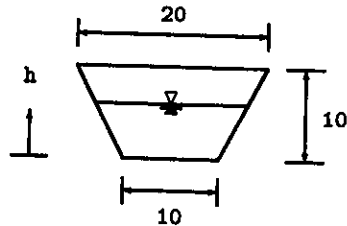
一：簡答題

- (一) 有一數值微分公式： $f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$ ，其中  $a-h < \xi < a+h$ ， $-\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$  為截去誤差 (truncation error)。某生打算使用 C 或 Fortran 等程式語言撰寫程式來驗證此公式。為簡化問題起見，假設  $f(x) = x^4$ ， $a$  為小於 1000 的自然數。請問是不是輸入的  $h$  越小，計算出來的微分值會越靠近真正的函數微分值  $f'(a)$ ，有沒有可能會產生完全錯誤的答案，請說明你的理由。
- (二) 同上題假設，若將函數改為  $f(x) = x^2$ ，請問當  $h$  由大變小時，截去誤差是否也會隨之由大變小？
- (三) 在  $[0, 1] \times [0, 1]$  區域上的二維邊界值問題： $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ ，這裡的  $f(x, y)$  為給定的函數，使得函數  $u(x, y)$  在邊界值為 0。某生要使用數值差分法來估算此微分方程式的解答，假設其對  $x$  與  $y$  方向的二次微分都使用三點的中間數值差分公式 (central difference formula)，同時讓  $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$ ， $n$  為大於 2 的整數。請問使用以上的差分公式所組出來的聯立方程式  $AU = F$  的  $A$  矩陣大小為何？
- (四) 同上題假設，請計算  $A$  矩陣的稀疏率 (sparsity ratio)，即矩陣的非零元素個數與矩陣所有元素個數的比值？

二：右圖為某立體圓形杯子的側面圖，假設杯底的直徑為 10 公分，杯口直徑為 20 公分，杯高為 10 公分：

· 計算迭代一次後的數值，以分數表示計算結果？

- (一) 今倒入若干體積的水，假設水的體積函數為  $V(h)$ ， $h$  為水位高度，請導出此函數？
- (二) 請問當水高約為多少公分時，杯子中水的體積剛好為杯子容積的一半。請使用牛頓迭代法導出迭代公式，由水高 6 公分起開始迭代



三：有一個二次多項式函數  $f(x)$ ，假設在以下三點的數值為：

$x$	0	$n$	$2n$
$f(x)$	$f(0)$	$f(n)$	$f(2n)$

請用 Newton divided difference 導出此多項式的型式為  $f(x) = bx^2 + (a - nb)x + f(0)$ ，這裡的  $a$  與  $b$  分別為 Newton first order 與 second order divided difference 對前兩點與前三點的計算數值。

四：使用二次樣條函數 (quadratic spline function) 對某函數  $f(x)$  做插分，假設此函數在以下三點的數值如下：

$x$	-1	0	1
$f(x)$	2	0	3

且  $f''(1) = 2$ 。

- (一) 請推導此樣條函數在  $[-1, 1]$  的型式？
- (二) 請利用此樣條函數估算  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  ？

五：下表為高斯積分法 (Gaussian quadrature) 的積分點座標及各積分點所對應的加權值：

積分點數量	1	2		3		
積分點座標	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
加權值	2	1	1	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$

請用兩點積分法計算以下的函數積分：

(一)  $\int_{1/\pi}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2} dx$

(二)  $\int_0^2 \int_0^1 x^2 y^2 dy dx$