

參  
考  
用

1) 設  $P = 3(x^2 + y^2) - x$ ,  $Q = -y$ , 已知  $Pdx + Qdy = 0$  不是 exact differential equation, 而且  $F = (x^2 + y^2)^m$  為  $Pdx + Qdy = 0$  的積分因子, 請求出  $m$  的數值。  
(25%)

2) 設一力學系統的控制方程為  $m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = f(t) = \sin \omega t$ , 其中  $m$  和  $k$  分別代表質量和彈性係數,  $y(t)$  代表位移歷時,  $f(t) = \sin \omega t$  代表週期外力。當  $\omega$  改變時, 求出的  $y(t)$  也會改變, 特別是, 當  $\omega$  達到某特定數值時, 力學系統會產生共振。設初始條件為  $y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0$ , 而且  $m=1$  和  $k=1$ , 請求出力學系統在共振狀態下的  $y(t)$ 。  
(25%)

3) 設

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

為一個  $5 \times 5$  的矩陣, 請求出此矩陣的行列值  $\det(A)$ 。  
(25%)

4) 考慮一圓形的封閉曲線  $C$ , 其方程為  $x^2 + y^2 = 1$ , 設向量場

$$\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} = \left(\frac{1}{3}x^2y^3 - yx^4\right)\vec{i} + (xy^4 + x^3y^2)\vec{j},$$

請計算 contour integral  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , 此積分的方向為逆時針方向,  $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$ 。

(25%)

