

# 國立中央大學八十七學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 化學工程研究所 不分組 科目: 工程數學 共 2 頁 第 1 頁

1. (5分) Consider vectors  $\underline{a} = [-1, 2, 0]$ ,  $\underline{b} = [2, 3, 1]$ , and  $\underline{c} = [5, -7, 2]$ . Find  $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = ?$

2. (25分) Let function  $f(x, y, z) = 4xyz$ , vector function  $\underline{v} = x^2 \underline{i} + (y-z)^2 \underline{j} + xy \underline{k}$ . Assume the coordinate system to be right-handed. Find (a)  $\text{grad } f(5, 7, -2)$ , (b)  $\nabla^2 f(x, y, z)$ , (c)  $\text{div } \underline{v}$  at  $(3, 1, 5)$ , (d)  $\text{curl } \underline{v}$ , and (e)  $D_{\underline{v}} f(1, 1, 1)$ .

3. Solve the Laguerre's differential equation

$$ty'' + (1-t)y' + ny = 0$$

by power series method and Laplace transform method. (10分)

5. Find the deflection  $u(x,t)$  of the vibrating string (length  $L=\pi$ , ends fixed, and  $c^2=1$ ) corresponding to zero initial velocity and initial deflection of  $0.02 \sin x$ : (10分)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{one-dimension wave equation})$$

6. (a) Solve a typical Bessel's equation  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$  (in terms of  $J_\nu$  and  $Y_\nu$ ) (5分)

- (b) Which of the following statements about the general properties of homogeneous (Eq.(1)) and nonhomogeneous (Eq.(2)) linear differential equation is (or are) wrong:

- (1) The sum of the two solutions of Eq.(1) is a solution of Eq.(1)
- (2) A multiple  $y = cy_1$  of a solution of Eq.(1) is not a solution of (1), unless  $c=1$
- (3) The sum of the two solutions  $y = y_1 + y_2$  of a solution  $y_1$  of Eq.(1) and  $y_2$  of Eq.(2) is a solution of Eq.(1).
- (4) The difference  $y = y_1 - y_2$  of two solutions of Eq.(1) is a solution Eq.(2) (5分)

- (c) The determinant ( $D = \det A$ ) of a homogeneous linear system of  $n$  equations is equal to \_\_\_\_\_ if the system has only the trivial solution and why? (5分)

# 國立中央大學八十七學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 化學工程研究所 不分組·科目: 工程數學 共 **2** 頁 第 **2** 頁

7. 納米 ( $1\text{nm}=10^{-9}\text{m}$ ) 級粒子近年頗受各方注意。不論是有機無機或金屬物質皆可製作成直徑在數納米範圍之粒子。假若物質之比重為 4，試估計 5nm 直徑粒子。每克有多少表面積。請用( $\text{m}^2/\text{gm}$ )單位表示。(5 分)
8. 上述之納米粒子若為氧化物，表面通常會吸附水分子。假若每一層水分子有 0.5A 厚。 ( $1\text{A}=10^{-10}\text{m}$ ) 則每一克納米粒子會吸附多少克水。(5 分)
9. 微小粒子置於水中時，有時會互相凝聚成較大顆粒。要避免凝聚可以加入界面活性劑。只要每一粒子表面都覆蓋了界面活性劑就不會再產生凝聚。依照以上數據 (固體比重 4，粒徑 5nm)，一含有 5wt% 之水溶液要加多少重量比之界面活性劑才能保證不產生凝聚。(假設界面活性劑比重為 1，單分子層厚度為 2A。(5 分)
10. 假設一多成分液體之成分摩耳分率為  $y_i$ 。其平衡蒸汽之摩耳分率為  $x_i$ 。而存在  $x_i = \frac{K_i y_i}{\sum_{i=1}^N K_i y_i}$  之關係。今定義  $\Omega_i$  為方程式  $f(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{K_i x_i}{K_i - \omega} = 0$  之根。試
- A) (10 分) 證明此方程式有  $N-1$  個正實數根。
- B) (10 分) 將  $y_i$  與  $x_i$  都寫成  $K_i$  與  $\Omega_i$  之函數。