

國立中央大學 106 學年度碩士班考試入學試題

所別： 土木工程學系 碩士班 大地組(一般生)

共 1 頁 第 1 頁

科目： 常微分方程式

本科考試禁用計算器 須有計算過程

*請在答案卷 內作答

1) 設 $P = e^{x-y}$, $Q = 1 - e^{-y}$ 。已知微分方程

$P dx + Q dy = 0$ 的積分因子下滿足方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} Q - \frac{\partial F}{\partial y} P = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) F, \text{ 設 } F = F(y), \text{ 請}$$

求出 F 。

(25%)

2) 定義 $\mathcal{L}\{y\} = \int_0^{\infty} y(x) e^{-sx} dx$, 而且 $\delta(x-2)$ 代表 Dirac

delta 函數, $\int_0^{\infty} \delta(x-2) dx = 1$ 。請利用 Laplace

轉換解以下邊界值問題:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \delta(x-2), \quad 0 \leq x \leq 3, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 0.$$

求出 $y(x)$ 後, 請計算 $y(x)$ 在 $x=1$ 處的值 $y(1)$ 。

(25%)

3) 設 $y(x)$ 滿足條件 $y(1) = 1$ 和方程

$$x \frac{dy}{dx} + y(1 - x^3 y^2) = 0$$

請算出 $y(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 處的值 $y(\frac{1}{2})$ (25%)

4) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dot{\underline{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

設 $\underline{x}(t)$ 滿足方程 $M \ddot{\underline{x}} + K \underline{x} = 0$, 求 $x_2(t)$ 。此處

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} \underline{x}, \quad \ddot{\underline{x}} = \frac{d^2}{dt^2} \underline{x}. \quad (25\%)$$

參考
用