

1) 試求解下列微分方程：

$$xy'' - y' - (3+x)x^2 e^x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2e$$

(20分)

2) 若 $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ 且

$$\begin{aligned} x' - 2x - 3y &= ze^{2t}, & x(0) &= -\frac{2}{3} \\ -x + y' - 4y &= 3e^{2t}, & y(0) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

試求 $x(\frac{1}{2}) - y(\frac{1}{2}) = ?$

(20分)

3) 球面 S 的方程為 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 向量場 \vec{F} 的表達式為 $\vec{F} = (x^3 - y^3)\vec{i} + (z + y^3)\vec{j} + (e^x + z^3)\vec{k}$.

請計算球面積分 $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$, 其中 dA 代表球面 S 上的面積微元素, 而 \vec{n} 則代表球面 S 上的單位法向量。

(30分)

(提示 = 半徑為 r 的球面, 其總面積為 $4\pi r^2$)

4) 考慮矩陣

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

其中 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 代表 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 餘類推。

請計算 A^{-1} 和 $\text{rank}(A)$ 。

(30分)

注意答案中 不可以 出現小數點, 但

可以有數字的平方根符號。

參考用