

國立中央大學八十六學年度碩士班研究生入學試題卷

所別： 機械工程研究所 ^甲 _乙 丙 丁 組 科目： 工程數學 共 2 頁 第 1 頁

1. A funnel (Fig. 1), whose angle at the outlet is 60° and whose outlet has a cross-sectional area of 0.5 cm^2 , contains water. At time $t=0$ the outlet is opened and the water flows out. Determine the time when the funnel will be empty, assuming that the initial height of water is $h(0)=10\text{cm}$. From Torricelli's law, the velocity with which a liquid issues from an orifice is $v=0.6\sqrt{2gh}$. (20%)

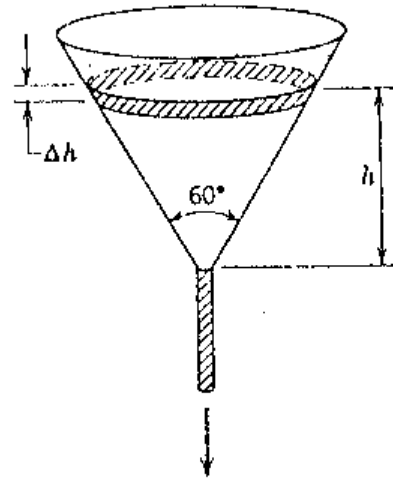


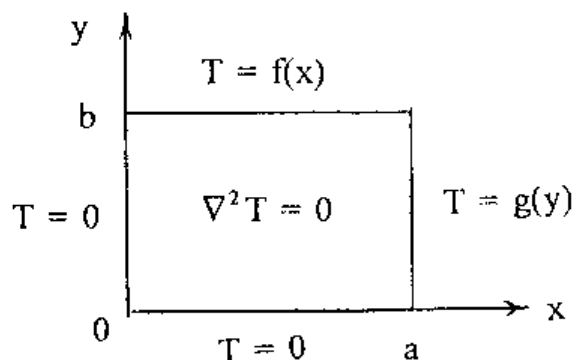
Fig. 1 Funnel

2. a. $[A]_{n \times n}$ 為一 $n \times n$ 矩陣 ($AX_i = \lambda_i X_i, \lambda_i; i=1, 2, \dots, n$) 若特徵值 λ_i 為 (1) 數根，則特徵向量 X_i 量必互為 (2) .
 b. 在一向量空間中，
 (i) 任一組正交集集中向量必互為 (3) 向量集合。若該組向量集合經 (4) 程序後即為一組正交向量集合。
 (ii) n 度空間中，線性獨立的幾何意義為兩向量相互 (5) .
 [註]：請將答案依序寫在答案卷上否則不予計分。(20%)

3. 解下面熱傳問題 (20%)

$$\nabla^2 T = 0, \quad T_{xx} + T_{yy} = 0$$

T 的邊界值如圖示。



國立中央大學八十六學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 機械工程研究所 ^甲 _乙 組 科目: 工程數學 共 2 頁 第 2 頁

4. Find the residue at $z = 0$ of the function (20%)

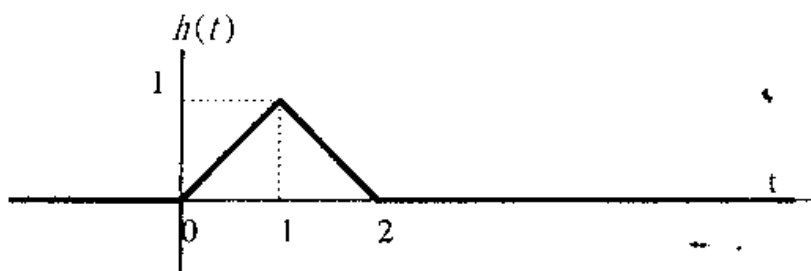
$$(a) \frac{z - \sin z}{z}; \quad (b) \frac{\cot z}{z^4}; \quad (c) \frac{\sinh z}{z^4(1 - z^2)}$$

Use residues to evaluate the integrals of the following functions around the circle $|z| = 3$ in the positive sense:

$$(d) z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right); \quad (e) \frac{z+1}{z^2-2z}$$

5. (a) (5%) 求 $h(t)$ 的拉氏變換 $L[h(t)]$, 其中 $h(t)$ 如下:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$



(b) (15%) 用拉氏變換求出下列微分方程組中 $z(t)$ 的解, 其中 $h(t)$ 即為(a)部份之 $h(t)$ 。

$$x(t) + y(t) = x(t) + y(t) + 2h(t)$$

$$x(t) + 2z(t) = 3y(t)$$

$$z(t) - y(t) = y(t) - x(t) - 2h(t)$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0$$