

國立中央大學 112 學年度碩士班考試入學試題

所別： 大氣科學學系大氣物理碩士班

共 1 頁 第 1 頁

科目： 應用數學

1. (a) Find a second-order homogeneous linear ODE for which the given functions are solutions. (b) Show linear independence of these functions by the Wronskian. (c) Solve the corresponding initial value problem. (計算題，請詳列計算過程，無計算過程者不予計分)。

$$1, e^{3x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

(20%)

2. Solve the following initial value problem. (計算題，請詳列計算過程，無計算過程者不予計分)。

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + 2 \cos t & y_1(0) &= -1, & y_2(0) &= 2 \\ y_2' &= 4y_1 - 8 \sin t \end{aligned}$$

(20%)

3. Find an eigenbasis and diagonalize the following matrix. (計算題，請詳列計算過程，無計算過程者不予計分)。

$$\begin{bmatrix} -5 & -6 & 6 \\ -9 & -8 & 12 \\ -12 & -12 & 16 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -2$$

(20%)

4. Let $f = xy - yz$, $\mathbf{v} = [4z \ 2y \ x - z]$, $\mathbf{w} = [y^2 \ y^2 - x^2 \ 2z^2]$. Find

- a. $f \nabla f$ at $P: (0, 3, 1)$ b. $\nabla^2(xzf)$
c. $(\nabla \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ at $(4, 0, 2)$ d. $\mathbf{v} \cdot ((\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v})$

(計算題，請詳列計算過程，無計算過程者不予計分)。

(20%)

5. Solve, $y'' + \omega^2 y = r(t)$, where $|\omega| \neq 0, 1, 2, \dots$, $r(t)$ is 2π -periodic and

$r(t) = 3t^2$ ($-\pi < t < \pi$). (計算題，請詳列計算過程，無計算過程者不予計分)。

(20%)