

國立中央大學97學年度碩士班考試入學試題卷

所別：大氣物理研究所碩士班

科目：應用數學 共 頁 第 頁

*請在試卷答案卷(卡)內作答

1. 解釋下列名詞並舉例說明之。

- a. 非線性微分方程式(nonlinear differential equation)
- b. 共振(resonance)
- c. 疊加原理(superposition principle or linearity principle)
- d. 奇異點(singular points of a differential equation)
- e. 函數的正交性(orthogonality of functions)

(15%)

2. 請解下列之初始值問題(initial value problem)。

$$y'' + 9y = 6 \cos 3x \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

(10%)

3. 何謂傅利葉級數(Fourier series) 和傅利葉積分(Fourier integral)? 請說明它們之間的差異與應用範圍。何謂傅利葉轉換(Fourier transform)? 請說明與比較傅利葉轉換與拉普拉斯轉換之間的差異與應用範圍。請解出下列週期函數(periodic function)的傅利葉級數。

$$f(x) = \pi - x, \quad 0 < x < 2\pi$$

(15%)

4. 請定義對稱矩陣(symmetric matrix), 斜對稱矩陣(skew-symmetric matrix), 和正交矩陣(orthogonal matrix), 並說明其特性。請解出下列矩陣的特徵值與特徵向量。

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 & -12 \\ 4 & 10 & -2 \\ -4 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

(15%)

5. 請定義梯度(gradient), 捲度(curl), 和散度(divergence), 並說明其特性與物理意義。何謂葛林定理(Green's theorem)? 何謂史多克斯定理(Stokes's theorem)? 何謂高斯散度定理(divergence theorem of Gauss)? 請敘述這些定理的主要應用。

(15%)

6. 請寫出拉普拉斯方程式(Laplace equation)在圓柱座標(cylindrical coordinates)與球座標(spherical coordinates)上的形式。請嘗試從這些座標中的拉普拉斯方程式導出貝梭方程式(Bessel's equation)與拉氏方程式(Legendre equation)。

(15%)

7. 請敘述並舉例說明如何利用分離變數方法(method of separating variables)來解偏微分方程式(partial differential equation)。請敘述並解釋波方程式(wave equation)與熱方程式(heat equation)最主要的差異。

(15%)

參考用