

# 國立中央大學八十八學年度碩士班研究生入學試題卷

所別：太空科學研究所 不分組 科目：

應用數學

共 / 頁 第 / 頁

1. 解下列常微分方程式

[10%] (a)  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 6x + 12$

[10%] (b) 
$$\begin{cases} 2 \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 4x = 2t \\ 2 \frac{dx}{dt} - 4 \frac{dy}{dt} - 3y = 0 \end{cases}$$

2. 已知  $\vec{A} = \nabla \phi$  證明

[10%] (a)  $\nabla \times \vec{A} = 0$

[10%] (b)  $\nabla(A^2) = 2(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{A}$

3. 請用 Residue theorem 求下列積分之值

[10%] (a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

[10%] (b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

參考用

[20%] 4. 已知週期為  $2\pi$  的週期函數  $f(x)$ ，在區間  $-\pi \leq x \leq \pi$  定義為

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi \\ -x & -\pi \leq x < 0 \end{cases}, \text{ 試求 } 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \text{ 之值。}$$

[20%] 5 試求二維 Laplace equation  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$  在區間  $r \leq a$  之解

。已知邊界條件為  $T(r=a, \theta) = f(\theta)$ 。