

國立中央大學九十學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 財務金融學系 乙、丙組 科目: 微積分 共 1 頁 第 1 頁

1. 試求 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ 之值。(5分)

2. 若 $y = (x^3 + 2x + 2)^{100}$, 求 y' 。(5分)

3. 試求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 之 n 階導函數。(5分)

4. 求極限: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ 。(5分)

5. 試求 $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$ 在區間 $(0, 2\pi)$ 之相對極值。(10分)

6. 試求函數 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 之兩個實根, 並證明存在一個數 c 介於此

二實根之間, 使 $f'(c) = 0$ 。(10分)

7. 設 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, 試證在區間 $(-8, 8)$ 中, 不存在任何 c 值, 滿足均值定理

方程式 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ 。(10分)

8. 令 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$, $\sigma > 0$, 則 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} f(x) dx = ?$ (15分)

9. 定義 $r(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, $\alpha > 0$ (15分)

a) 證明 $r(\alpha+1) = \alpha r(\alpha)$

b) 當 α 為正整數時, $r(\alpha+1) = ?$

c) $r\left(\frac{7}{2}\right) = ?$

10. 二元常態分配的機率密度函數定義如下: (20分)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-Q}{2}\right),$$

$$Q = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right],$$

則 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = ?$

