國立中央大學101學年度碩士班考試入學試題卷

所別：數學系碩士班 乙組(一般生)　科目：數值分析　共 2 頁 第 1 頁

本科考試禁用計算器　＊請在試卷答案卷（卡）內作答

一： 簡答題（每題五分，僅回答對錯沒有分數，須說明原因）

(1) 將計算機裡所有比零大的浮點數由小排到大，請問數字是否呈等距分佈？

(2) 請由微分的定義 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 解釋在實際使用計算機計算微分時，計算出來的數值微分值在哪種情況總為零？

(3) 若 f(x) 函數有實數根，某生找到一個區間使得 f(x) 在區間兩端點的函數乘積為負值，為保證求得到根，他使用二分逼近法 (bisection method) 求根，不過迭代幾次後發現 f(x) 在兩端點的函式乘積為正值，若程式無誤，則為何會發生此現象？

(4) 若函數 f(x) 為 $\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x}$，則當 x 由正數逼近零時，在計算上會發生哪種現象，如何避免？

(5) 請說明 round-off error 與 truncation error 的差別？

(6) 解釋在哪種情況 false position method (regular falsi method) 的求根速率可能會比二分逼近法更慢？

(7) 寫出 Lagrange Polynomial Approximation theorem。

(8) 某個儀器每隔若干小時會自動取樣得到一個數據，若要繪製資料的圖形，請問選擇哪一種差分法較為適合？

(9) 若 $f''(x) \approx a f(x-h) + b f(x) + c f(x+h)$，請推導 a，b，c 之值。

(10) 某個求積分數值法的截去誤差 (truncation error) 為 $O(h^p)$， h 為兩相鄰點的距離，請問在數值上要如何印證？

(11) 使用高斯積分法 (Gaussian quadrature) 對某一長方體區域 $\int_\Omega x^3y^4z^7\,dx$ 作數值積分，請問至少要使用多少個積分點 (quadrature point) 才會沒有截去誤差 (truncation error)？

(12) 請解釋為何使用 cubic spline 穿過 n 個數值點時，總須要額外加上兩個條件才能確定此 spline？

(13) 使用高斯消去法計算 $Ax=b$ 的根時，若矩陣 A 為 $n\times n$ 的 tridiagonal 矩陣，推導其計算的複雜度 (arithmetic complexity)。

(14) 某生使用 Euler method 求正解 (exact solution) 為 2x-3 的某一階常微分方程式的根，計算後所得到的誤差微乎其微，但驗算數值方法的收斂速率則完全與理論不合，請問這樣的計算結果能否接受？

注意：背面有試題

國立中央大學101學年度碩士班考試入學試題卷

所別：數學系碩士班 乙組(一般生)　科目：數值分析　共 2 頁 第 2 頁

本科考試禁用計算器　*請在試卷答案卷（卡）內作答

二：（十分）若 r_n 趨近於平滑函數 $f(x)$ 的根 r，請由以下的泰勒展開式

$$\begin{aligned} f(r) &= f(r_n + (r - r_n)) \\ &= f(r_n) + (r - r_n) f'(r_n) + \tfrac{(r-r_n)^2}{2!} f''(r_n) + \tfrac{(r-r_n)^3}{3!} f'''(\xi) \end{aligned}$$

，ξ 介於 r 與 r_n 之間

推導出 Cauchy 的求根迭代公式為

$$r_{n+1} = r_n - \frac{2 f_n}{f_n' \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2 f_n f_n''}{(f_n')^2}} \right)}$$

這裡的 f_n，f_n'，f_n'' 分別代表 $f(r_n)$，$f'(r_n)$，$f''(r_n)$。

三：（十分）複合梯形法的積分公式為

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

以上 n 為積分區域的等份數，h 為 $\frac{b-a}{n}$，$x_0 = a$，$x_n = b$，ξ 在 (a,b) 之間。假設 round-off error 的最大值不會超過 ε，請由此分別估算 round-off error 與 truncation error 的大小，畫出總誤差圖形。

四：（十分）一組非線性的聯立方程式為：$f_1(x_1,x_2) = 0$ 與 $f_2(x_1,x_2) = 0$， f_1 與 f_2 皆為可微函數，請推導牛頓迭代法的求根公式。

注意：背面有試題