

參  
考  
用

一共五題，每題廿分

1. 所謂雙原子分子 (diatomic molecule) 乃由兩個原子所構成，此二原子間之交互作用位能可用下式表示：

$$V(x) = -ax^{-6} + cx^{-12}$$

其中之  $x$  為此二原子間之距離而  $a$  及  $c$  皆為正常數 ( $a > 0, c > 0$ )。

(a) 假定此二原子中之一其質量甚為龐大故靜止不動，且另一較輕之原子 (其質量為  $m$ ) 僅在兩原子之連心線上運動，試定量討論此二原子在分子內之運動

(b) 問此二原子間之交互作用力為何？求此二原子間之平衡距離 (equilibrium distance) 及較輕之原子 (其質量為  $m$ ) 對於平衡點 (由前述平衡距離所決定) 振動之週期。

2. 蟹形星雲脈衝星 (Crab nebula pulsar) 乃由超新星爆炸 (supernova explosion) 殘留之核心經坍潰縮陷所形成之中子星 (neutron star)。假設中子星之質量為  $1.44 M_{\odot}$  ( $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$  Kg 為太陽質量)，收縮前之核心半徑為  $0.5 R_{\odot}$  ( $R_{\odot} \approx 6.96 \times 10^8$  meter)，縮陷後所形成之中子星之半徑僅  $8.8$  Km (公里)。假設中子星乃密度均勻之球體 (其轉動慣量為  $\frac{2}{5} MR^2$ )，且縮陷前之旋轉週期為  $5$  天，試以角動量守恒原理計算中子星之旋轉週期及動能。

(b) 觀測結果顯示蟹形星雲脈衝星之週期正在逐漸增加，其增加率為  $\frac{dP}{dt} = 1.3 \times 10^{-6}$  sec/yr. 由此可知星球轉動能不轉輻射能，試證脈衝星動能之遞減率為 ( $P$  表週期)

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{5\pi} MR^2 \omega^3 \frac{dP}{dt} \quad (2)$$

(2) 式中之  $M$  為中子星質量  $R$  為其半徑 ( $R = 8.8$  Km,  $M = 1.44 M_{\odot}$ )  $\omega$  為脈衝星之旋轉角速度。在計算  $dK/dt$  時假定  $P = 0.033$  sec. 而  $\frac{dP}{dt} = 1.3 \times 10^{-6}$  sec/yr. 請作數值計算，問  $\frac{dK}{dt}$  之值為何？答案以 W (Watt) 表之。

3. 一半徑為  $R$  之球體在其表面具有均勻之電荷，其表面電荷密度為  $\sigma$ ，假設此球環繞其對稱軸之角速度為  $\omega$ ，試證此球之磁矩 (Magnetic Moment) 之大小為  $\frac{4}{3} \pi \sigma \omega R^4$ 。如將此球置於均勻磁場  $B$  中，且磁場與旋轉軸垂直，問磁矩在磁場中所受之力矩 Torque 為何？

4. 一無窮大理想導體充滿直角座標系  $z < 0$  之空間，其表面 ( $z=0$ ) 均勻帶電，所帶之表面電荷密度為  $\sigma$ ，試應用 Gauss 定理求此帶電導體所產生之電場。

如果在  $x$  方向另加一均勻磁場  $\vec{B} = B\hat{x}$  ( $B > 0$  為正常數磁場)，現有一電荷為  $q$ ，質量為  $m$  之粒子，從座標系之原點由靜止開始在上述之均勻電場與磁場中運動，請以非相對論性之牛頓運動定律 (Nonrelativistic Newtonian Mechanics) 及電磁學中之 Lorentz 定律 (關於電磁場在帶電粒子上之作用力) 詳細定量討論粒子之運動。

請寫出粒子之速度及加速度分量 ( $v_x, v_y, v_z; a_x, a_y, a_z$ ) 所滿足之運動方程式，並以適當初期條件將運動方程式積分而說明軌道之特性。

5. 何謂絕熱過程 adiabatic process? 試以熱力學第一定律及理想氣體 (ideal gas equation of state) 方程式等證明此絕熱過程之關係式為

$$PV^\gamma = \text{常數}$$

上式中之  $\gamma = C_p/C_v$  表示定壓比熱與定容比熱之比值。

如果前述理想氣體係由可以振動及轉動之雙原子分子所構成 (vibrating rotating diatomic molecule) 則  $C_p, C_v$  及  $\gamma$  之值為何? 如果此雙原子分子只能轉動不能振動則  $C_p, C_v$  及  $\gamma$  之值為何? ( $C_p$  及  $C_v$  之值應以氣體常數  $R$  表示之，為了您的方便請注意  $C_p = C_v + R$  (一個 mole)，此式不用證明)。

提示：在計算  $C_v$  時請用 Equipartition of Energy Theorem