

國立中央大學八十七學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 物理研究所 不分組 科目: 應用數學 共 2 頁 第 / 頁

1. Please

(a) (6/points) expand and simplify $\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{A})$,
where $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, and $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

(You may use any method, e.g., vector identities or ϵ_{ijk} .)

(b) (7/points) calculate $\nabla \cdot (r^{-3}\mathbf{r})$, where $r = |\mathbf{r}|$.

Now consider the matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

please find

(c) (7/points) the eigenvalues and a set of eigenvectors.

2.

(a) (4/points) Please find the first 2 terms in the power series for $\tan z$.

(b) (7/points) The Laurent series expansion of a complex function around the point $z = 1$ has the form

$$f(z) = \dots \frac{a_{-2}}{(z-1)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-1)} + a_0 + a_1(z-1) + \dots$$

Please find the first three lowest order non-vanishing terms of this expansion for

$$f(z) = z^{-2}(z-1)^{-1}.$$

(c) (9/points) An analytic function, $w = u + iv = f(z)$, has imaginary part

$$v = x^2y - 2xy - y^3/3,$$

please find the real part u .

物物田

注意：背面有試題

國立中央大學八十七學年度碩士班研究生入學試題卷

所別： 物理研究所 不分組 科目： 應用數學 共 2 頁 第 2 頁

3 (a) 求矩陣

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

之本徵值 (eigen value) 和歸一化之本徵向量。(10 points) (10%)

(b) 選(a)之本徵向量為基底向量，問(a)之矩陣有何改變？(5 points) (5%)

(c) 求矩陣

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & i & 3 \\ 1 & -5 & 9 & -7i \\ -i & 9 & 6 & 4 \\ -1 & 7i & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

之本徵值之和。(5)

4 $f(z)$ 為複變數 z 的函數

(a) $f(z)$ 必需滿足那些條件才是 z 的解析函數 (analytic function)? (5)

(b) 若 $f(z)$ 為 z 的解析函數，其實部為 $3x^2y - y^3$ ，求其虛部。(5)

(c) $f(z) = \ln(z-1)$ 問在複數平面上繞 $z=1$ 轉一圈 $f(z)$ 之值有何改變？(5)

(d) $f(z)$ 為解析函數，求其 Cauchy 積分式。(5)

5. 將一維波包 $\psi(x, t)$ 以平面波展開

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

此處 $\omega = \hbar k^2 / 2m$ 。設 $t=0$ 時，

$$\psi(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

a 為常數

(a) 求 $\phi(k)$ 。(10)

(b) 求 $\psi(x, t)$ 。(10)

