國立中央大學八十四學年度碩士班研究生入學試題卷

所別：統計研究所　甲組　　科目：基礎數學　　共 1 頁 第 1 頁

1. 令函數 f 在區間 $[0,1]$ 的第三階導數 $f^{(3)}$ 存在並且有限。

   (i) 假設 $f(0)=f(1)$ 並且 $f'(0)=f'(1)=0$，證明存在 $c\in(0,1)$ 滿足 $f^{(3)}(c)=0$。 (10%)

   (ii) 假設 $f(x)\geq 0,\ \forall x\in(0,1)$ 並且在 $(0,1)$ 內至少有兩相異點 x 滿足 $f(x)=0$，證明存在 $c\in(0,1)$ 滿足 $f^{(3)}(c)=0$。 (10%)

2. (i) 求 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-x^2}dx$。 (5%)

   (ii) 證明不定積分 $\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos xt\,dt$ 對任何 $x\in(-\infty,\infty)$ 均存在並求出此積分值。(提示：做部分積分二次並引用(i)) (15%)

3. 當 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂時，證明級數 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是一致收斂(uniformly convergent)。 (10%)

4. 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k e^{-n}}{k!}$。 (10%)

5. 證明或反證下面結果：$\mathbf{A}$ 是一 $n\times n$ 矩陣，則 $tr(\mathbf{A}^2)=0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 爲零矩陣。 (10%)

6. 找出 $n\times n$ 方陣

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

的特徵根(eigenvalue)和特徵向量(eigenvector)。 (10%)

7. (i) $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是對稱(symmetric) $n\times n$ 方陣，並且 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 是自乘不變(idempotent)，證明 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ 也是自乘不變。 (5%)

   (ii) $\mathbf{A}$ 是非負定(nonnegative definite) $n\times n$ 矩陣，證明存在一 $n\times n$ 矩陣 $\mathbf{H}$ 滿足 $\mathbf{A}=\mathbf{H}^2$。 (5%)

   (iii) 若 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 正交(orthogonal)矩陣，證明 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=n$。 (5%)

   (iv) 若 $n\times n$ 矩陣 $\mathbf{A}$ 是正定(positive definite)，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ 均是非負定，證明 $|\mathbf{A}-\mathbf{B}|\leq|\mathbf{A}|$。 (5%)