

國立中央大學八十五學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 統計研究所 乙組

科目: 統計學

共 / 頁 第 / 頁

1. 假設隨機變數 X 的分布如下:

x	1	2	3	4	此處參數 $\theta \in (0, 0.2)$ 。
$f_{\theta}(x)$	θ	2θ	$0.8 - 2\theta$	$0.2 - \theta$	

(1) 寫出最小充分統計量 (minimum sufficient statistic) 的定義並找出 θ 的最小充分統計量。 (10%)

(2) 求參數 θ 的最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。 (10%)

2. 假設某一公司在一時間單位 (五分鐘為一單位) 內平均接獲的電話次數為 θ 。若 X 表示五分鐘內打進來的電話次數符合卜瓦松過程 (Poisson process)，則 $X \sim P(\theta)$ 。若某接線生已有五分鐘的電話次數資料 X ，她想估計再來十五分鐘內沒有電話打進來的機率以便能離開位置做其他事，她想用不偏估計量 (unbiased estimator)，請幫她回答下面問題。

(1) 定義不偏估計量並敘述它的意義。 (5%)

(2) 幫她找一不偏估計量並評估此估計量。 (10%)

(3) 如果上述不偏估計量是不好的，試找出另一替代估計量，並評估此二者之間的優劣。 (10%)

3. 假設隨機樣本 X_1, \dots, X_n 是來自常態分配 $N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$ 。

(1) 寫出最佳不偏估計量 (best unbiased estimator or uniformly minimum variance unbiased estimator) 的定義。 (5%)

(2) 求本問題 θ^2 的最佳不偏估計量。 (10%)

4. 假設隨機樣本 X_1, \dots, X_n 為獨立同分布 (i.i.d.) 來自均勻分布 (uniform distribution)

$U(0, \theta)$ ，參數 $\theta > 0$ 。

(1) 使用 $T = \max(X_1, \dots, X_n)$ 來構造 θ 的 95% 信賴水準之信賴區間。 (10%)

(2) 上述信賴區間包含參數 θ 的機率是否為 0.95，請說明理由。 (5%)

5. 假設可觀測隨機變數 X 的機率函數為

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1+\theta}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\theta, & x = 1 \\ \frac{1+\theta}{4}, & x = 2, \end{cases} \quad \theta \in (0, 0.25)$$

在顯著水準 $\alpha = 0.165$ 之下，吾人欲檢定 $H_0: \theta = 0.1$ 對 $H_1: \theta = 0.2$ 。

(1) 寫出 Neyman-Pearson 最佳檢定 (best test or most powerful test) 的定義。 (5%)

(2) 對本問題找出一最佳檢定並計算它的檢定力 (power)。 (15%)

(3) 上述最佳檢定是否唯一? 如非唯一，請再找出其它的最佳檢定。 (5%)