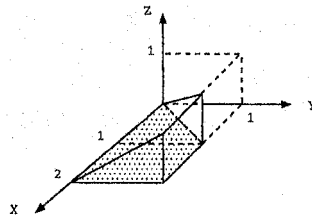


所別：數學系碩士班 乙組(一般生) 科目：基礎數學

- [10 分] 若 $f(x) = ax^2 + b + c$ ，請找出 $f(x)$ 函數在任一區間 $[x_1, x_2]$ 的兩個端點斜率一定等於區間內哪一點的斜率？
- [10 分] 有一三維區域如圖下，圖形內的兩個斜面分別為 $y = z$ 與 $x = y$ ，請利用以下的積分順序計算此三維區域的體積。

(a) 使用 $\int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} dy dz dx$

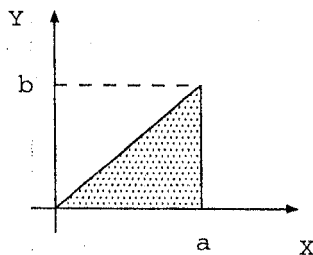
(b) 使用 $\int_{\square} \int_{\square} \int_{\square} dy dx dz$



- [10 分] 若一對稱矩陣的每個元素都是實數，請證明此矩陣的每個特徵值 (eigenvalue) 也是實數

- [10 分] 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ，若 $A^4 = c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I$ ， I 為單位矩陣 (identity matrix)， c_0, c_1, c_2 皆為非零的實數，請算出所有 $c_i, i = 0, 1, 2$ 之值。

- [15 分] 有一三角形如下圖，請用以下的極座標積分方式推導出此三角形面積，既三角形面積 = $\int_{\square} \int_{\square} r d\theta dr + \int_{\square} \int_{\square} r d\theta dr$ ，驗證三角形面積為 $\frac{ab}{2}$



注意：背面有試題

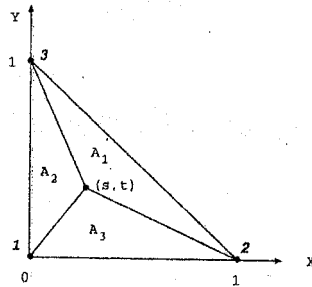
所別：數學系碩士班 乙組(一般生) 科目：基礎數學

6. [15 分] 若 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, 請利用泰勒展開式對 x 展開, 估算 $y(x)$ 在 $x = x_{n+1}$ 的函數值, 若展開式可以寫成以下公式:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + C_1(x, y)h + C_2(x, y)h^2 + \dots$$

以上 $h = x_{n+1} - x_n$, 假設 $f(x, y) = x + 2y + 1$, 則 $C_1(x, y)$ 與 $C_2(x, y)$ 兩函數分別為何?

7. [15 分] 若函數 $u(x, y)$ 定義在以下三角形的圖形上, 此三角形的三個點由原點逆時鐘算起分別為 1, 2, 3, 若此函數在三角形內的任一點 (s, t) 可以使用各子面積所構成的函數的線性組合代表, 即 $u(s, t) = c_1A_1(s, t) + c_2A_2(s, t) + c_3A_3(s, t)$, 請找出 $A_1(s, t), A_2(s, t), A_3(s, t)$ 並且證明其為線性獨立 (linearly independent).



8. [15 分] 若矩陣 A 為 $n \times n$ 的實數對稱矩陣, 則 $R(x)$ (Rayleigh quotient) 被定義為 $R(x) = \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, 若 A 矩陣的 n 個特徵值其大小分別為 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 請證明 $\lambda_1 \geq R(x) \geq \lambda_n$