

所別：數學系碩士班 乙組(一般生) 科目：基礎數學

1. (10 points) 若 $u(x)$ 在 $[a, b]$ 內連續，在 (a, b) 內可微。請證明必存在一點 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$u(b) - u(a) = u'(\xi)(b - a)$$

2. (20 points) 設 $u: (a, b) \rightarrow (a, b)$ 為一可微函數。給定任一實數 x_0 ，定義數列 $\{x_n\}$ 為 $x_{n+1} = u(x_n)$ ，其中 $n \geq 0$ 。假設存在一常數 $0 < c < 1$ 使得所有實數 x 皆滿足 $|u'(x)| < c$ 。證明 $\{x_n\}$ 是一個柯西數列 (Cauchy sequence)。(12 分)

假設當 $n \rightarrow \infty$ 時 $x_n \rightarrow \xi$ ，請證明 $u(\xi) = \xi$ 。(8 分) 這個 ξ 稱為 $u(x)$ 的不動點 (fixed point)。

3. (20 points) 令

$$u(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

試找出一個區間 (a, b) 使得當 $u(x)$ 被限制為 $u: (a, b) \rightarrow (a, b)$ 的函數時， $|u'(x)| < \frac{1}{2}$ 。(15 分)

根據前一題，存在一個 $\xi \in (a, b)$ 使得 $u(\xi) = \xi$ ，請問此 ξ 是甚麼數？(5 分)

4. (10 points) 證明向量 $(1, 0)$ 和 $(1, 1)$ 在實數平面所形成的向量空間內是線性無關的。

5. (10 points) 令 V 是一個向量空間，向量 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ 為一組基底。則對任何 $\vec{x} \in V$ 都有唯一的一組 x_1, x_2 使得

$$\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$

我們稱 $[x_1, x_2]^T$ 為 \vec{x} 在 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ 基底下的坐標向量。假設 \vec{x} 在 $\{(1, 0), (0, 1)\}$ 基底下的坐標向量是 $[x_1, x_2]^T$ ，請算出 \vec{x} 在 $\{(1, 0), (1, 1)\}$ 基底下的坐標向量。(5 分)

一般而言，假如 $[x_1, x_2]^T$ 是在 $\{(1, 0), (0, 1)\}$ 基底下的坐標向量，而 $[y_1, y_2]^T$ 是在 $\{(1, 0), (1, 1)\}$ 基底下的坐標向量，則存在一個方陣 A 使得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

請算出此方陣 A 。(5 分)

6. (20 points) 在實數平面所形成的向量空間內，若 $\vec{u} = [u_1, u_2]^T$ 而 $\vec{v} = [v_1, v_2]^T$ ，定義內積為

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

而向量長度為

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

若 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ，我們稱 \vec{u} 和 \vec{v} 互相垂直。請證明互相垂直的兩個非零向量必線性無關。(5 分)

假如 \vec{u} 和 \vec{v} 互相垂直而且 $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ ，我們稱 $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ 形成一組正則基底。請證明， \vec{x} 對正則基底 $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ 的坐標向量 $[x_1, x_2]^T$ 就是 (5 分)

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{u}, \quad x_2 = \vec{x} \cdot \vec{v}$$

假如 $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ 是一組非正則的基底，那麼就存在一組對偶基底 $\{\vec{p}, \vec{q}\}$ 使得

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{p}) \vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{q}) \vec{v}$$

請找出 $\{(1, 0), (1, 1)\}$ 的對偶基底。(10 分)

7. (10 points) 定義在區間 $(0, 1)$ 上的平方可積實值函數可以形成一個抽象的向量空間。在這個空間裡，可以定義內積為

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

依此定義，請找出一個垂直於 $f(x) = x$ 的二次多項式函數。(6 分)

請問在此內積定義之下， $f(x)$ 的向量長度是甚麼？(4 分)