

國立中央大學八十四學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 環境工程研究所 甲乙丙組 科目: 工程數學

共 / 頁 第 / 頁

參考用

1. 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

a) 請找出A的特徵值及特徵向量;(10分)

b) 請求 e^A 。(15分)

2. 若 $\vec{v} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$, 而曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 的外法向量(outer normal vector)為 \vec{N} , 請求出:

a) $\vec{N} = ?$ (10分)

b) $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{N} dS = ?$ (15分)

3. 試解下列微分方程:(10分)

$$y^3(2x^2 - 3x - 1)dx + 3y^2dy = 0$$

4. 已知 $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, for $x > 0$,

a) 請證明 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; (10分)

b) 試求積分值 $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} dx = ?$ (5分)

5. 試求下列邊界值問題的特徵值與特徵函數。(15分)

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0, \quad y(1)=y(e)=0$$

6. 若 $\int_0^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \begin{cases} 1 - \alpha, & \text{for } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0, & \text{for } \alpha > 1 \end{cases}$, 試求 $f(x)$ 。(10分)