

# 國立中央大學八十五學年度碩士班研究生入學試題卷

所別：機械工程研究所 丙、丁組 科目：工程數學 共 2 頁 第 1 頁

一. 弦的一維波動方程式為：(25%)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

請依序填寫下表中標有號碼之空格(計 5 個)，以說明弦振動在不同邊界條件下的運動狀況。(每小題各佔5%)

(表一)

Case	初始條件 I.C.	邊界條件 B.C.	特徵值 eigenvalue	特徵向量 eigenvector	波動方程式 全解
I	$u(x,0) = f(x)$ $u_t(x,0) = g(x)$	$u(0,t) = 0$ $u(l,t) = 0$	(1)	(2)	(3)

(表二)

Case	初始條件 I.C.	邊界條件 B.C.	波動方程式全解
II	$u(x,0) = f(x)$ $u_t(x,0) = g(x)$	(4)	(a) for $x > ct$ $u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)]$ $+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau$ (b) for $x < ct$ $u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) - f(x-ct)]$ $+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau$

(表三)

Case	初始條件 I.C.	邊界條件 B.C.	波動方程式全解
III	$u(x,0) = f(x)$ $u_t(x,0) = g(x)$	(5)	$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)]$ $+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau$

二. 試解微分方程式系統：(13%)

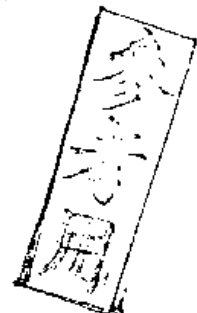
$$y_1'' = -8y_1 + 2y_2$$

$$y_2'' = 2y_1 - 5y_2$$

其初始條件(initial conditions)為：

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_1'(0) = y_2'(0) = 0.$$

三. 證明對於所有的三種 Sturm-Liouville Problems 而言，所有的特徵值(eigenvalues)均為實數。(12%)



四. (1) For any vectors  $\mathbf{F}$  and  $\mathbf{G}$ , prove that

$$|\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}| \leq \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{G}\| \quad (5\%)$$

(2) Given  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ , determine  $\mathbf{A}^{18}$ . (5%)

(3) Determine whether the set  $S$  of vectors in  $R^n$  form a subspace if  $S$  consists of all vectors in  $R^4$  with third component 2. (5%)

(4) Let  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  be the eigenvalues of a given matrix  $\mathbf{A}$ . Prove that

(a) The inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  has the eigenvalues  $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ , and (5%)

(b) The matrix  $\mathbf{A}^m$  has the eigenvalues  $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$ . (5%)

五.

$$\text{Let } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1. \\ 0, & 2\pi \leq t \end{cases}$$

(a) Evaluate  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ . (5%)

(b) Solve  $y'' + y = f(t)$  by using Laplace transform. (10%)

六.

$$\text{Let } f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Expand  $f(x)$  in a Fourier Series. (10%)