

# 國立中央大學九十一年度碩士班研究生入學試題卷

所別：化學工程與材料工程學系 科目：工程數學 共 2 頁 第 1 頁  
不分組

1. (20%)

Find the general solution of the differential equation  $y'' + \omega^2 y' = r(t)$ .

$$r(t) = t + \pi \quad \text{if } -\pi < t < 0$$

$$-t + \pi \quad \text{if } 0 < t < \pi \quad \text{and } r(t + 2\pi) = r(t), \omega \neq 0, 1, 3, \dots \quad (20\%)$$

2. (15%)

This is a mixing problem involving two tanks. Tank  $T_1$  contains initially 100 gal of pure water and tank  $T_2$  contains 100 gal of water in which 150 lb of salt are dissolved. The inflow into  $T_1$  is 2 gal/min from  $T_2$  and 6 gal/min containing 6 lb of salt from the outside. The inflow into  $T_2$  is 8 gal/min from  $T_1$ . The outflow from  $T_2$  to the outside is 6 gal/min. The mixtures are kept uniform by stirring. Find the salt contents  $y_1(t)$  and  $y_2(t)$  in  $T_1$  and  $T_2$ , respectively.

You are asked to use Laplace Transform to solve this problem.

3. (10%)

以向量的概念，計算出 a、b、c、d 四點所圍出的四面體的體積，此四點的座標分別是：

$$a=(0, 1, 2), \quad b=(5, 5, 6), \quad c=(1, 2, 1), \quad d=(3, 3, 1).$$

4. (10%)

Find the directional derivative of  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z$  at the point  $(-2, 2, 1)$  in the direction of the vector  $(2\vec{i} + 3\vec{k})$ .

5. (10%)

Compute the line integral  $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ , where

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y^2 \mathbf{i} - x^2 \mathbf{j},$$

C: is a straight-line segment from  $(0, 0)$  to  $(1, 2)$ .

參考用

注意：背面有試題

# 國立中央大學九十一學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 化學工程與材料工程學系 科目: 工程數學 共 2 頁 第 2 頁  
不分組

6 (20%)

奈米 ( $1\text{nm}=10^{-9}\text{m}$ ) 級粒子近年頗受各方注意。不論是有機無機或金屬物質皆可製作成直徑在數納米範圍之粒子。譬如氧化鋁之比重為 3.9，試估計 5nm 直徑之氧化鋁奈米粒子每克有多少表面積。請用 ( $\text{m}^2/\text{gm}$ ) 單位表示 (4 分)。氧化鋁奈米粒子表面通常會吸附水分子。假若每一層水分子有 0.5A 厚。 ( $1\text{\AA}=10^{-10}\text{m}$ ) 則每一克納米粒子會吸附多少克水 (4 分)。根據文獻，氧化物表面大約每  $\text{nm}^2$  有 6 個 OH 基。上述之氧化鋁奈米粒子，每克有幾莫爾 OH 基 (4 分)。

微小粒子分散於水中時，有時會互相凝聚成較大顆粒。要避免凝聚可以加入界面活性劑。只要每一粒子表面都包裹了界面活性劑就可以防止產生凝聚。依照以上數據 (氧化鋁比重 3.9，粒徑 5nm)，假設有界面活性劑其比重為 0.8，單分子層厚度為 2A。每克氧化鋁要添加多少克界面活性劑才可以將氧化鋁奈米粒子包裹住 (4 分)。另一種算法，是假設界面活性劑每個分子可以覆蓋約  $20\text{\AA}^2$  的面積。依據此假設，計算每克奈米氧化鋁需要幾莫爾界面活性劑才可以完全覆蓋其表面 (4 分)。

7. (15%)

有一方管反應器如附圖。長度為 L。其中上層為油相，並由右邊以  $V_o$  體積流率流入而由左邊流出。下層為水相，由左邊以  $V_w$  之體積流率流入而由右邊流出。流入之水相含有 A 與 B 兩反應物。而此二反應物在水中會發生  $A+B \rightleftharpoons C+D$  之反應。反應速率可以用  $r = k_w C_A C_B$  描述。自右邊流入之油相中不含 A、B、C 或 D 成分。

假設水相及油相中成分濃度皆只沿著長度方向改變。而 A、B、C、D 四成分皆會溶於油相，而且溶解速度很快達到平衡。因此在任何位置之油相中濃度  $y_i$  與水相中濃度  $x_i$  之間關係可以線性表示如  $y_i = K_i x_i, i = A, B, C, D$ 。請由微分質量平衡方法，建立一微分方程式組來描述水相中各成分濃度隨位置之關係及其邊界條件。(15 分)

