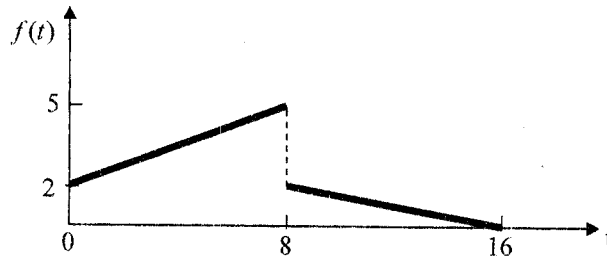


所別：土木工程學系碩士班 甲組 科目：工程數學

1. (10%)

(a) (5%) 請用單位階梯函數(unit step function)表示下圖所示之函數 $f(t)=?$

(b) (5%) 請求下圖所示函數 $f(t)$ 之 Laplace 轉換 (transform), $L(f(t)) = F(s)=?$



2. (15%)

求解以下之四階常微分方程之通解 $y(x)=?$

$$y^{(4)} + 10y^{(2)} + 9y = 2\sinh x$$

3. (15%)

向量 $\mathbf{A} = 3y\vec{i} - xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$, S 為以 $2z = x^2 + y^2$ ($z \leq 2$) 表示之曲面, C 為曲面 S 之邊界曲綫 (boundary curve), 請求以下封閉積分

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = ?$$

(其中 \mathbf{r} 為邊界曲綫 C 上點之位置向量(position vector), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分別為 x, y, z 坐標軸上之單位向量)。

4. (20%)

設 A 與 B 皆為 4×4 方陣, 且 $B = (B_{ij}) = A^n$ (n 為正整數)。又設

$$A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

求出 B_{32} 的值。

5. (10%)

設 Γ 代表複數平面上的單位圓, 其方程式為 $|z|=1$, $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$ 。請計算出閉迴路積分

$$\oint_{\Gamma} e^{\frac{1}{z}} dz \text{。 提示：可應用 } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ 公式去求出 } e^{\frac{1}{z}} \text{ 在 } z=0 \text{ 位置上的留數(residue)。}$$

6. (10%)

(a)(3%) 一維熱傳導方程式屬於偏微分方程式的哪一類方程式?

(b)(4%) 傅氏轉換和傅氏級數用於求解一維熱傳導問題時, 所解的問題有何不同?

(c)(3%) 在何種情形下, 可以推得傅氏餘弦變換(Fourier Cosine Transform)?

7. (10%)

已知一條兩端固定的弦之長度為 π , 波速為 1, 若此弦受到初始位移 $f(x) = k \sin 3x$; 初始速度 $g(x) = -0.01 \sin x$, 求其位移?

8. (10%)

利用 $f(x) = e^{-x}$ ($x > 0$) 計算 $\int_0^{\infty} \frac{\cos x \omega}{1 + \omega^2} d\omega$ $x > 0$ 。