

國立中央大學九十一年度碩士班研究生入學試題卷

所別： 土木工程學系甲丙戊組 科目： 工程數學 共 2 頁 第 / 頁

波方程 $u_{xx} + u_{yy} = u_{tt}$ 的解滿足以下條件：

B.C. : $u(0, y, t) = 0$, $u(1, y, t) = 0$, $u(x, 0, t) = 0$, $u(x, 1, t) = 0$

I.C. : $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$

設 $g(x, y)$ 為已知函數而此解可以表示成

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) \sin(K_{mn} t) .$$

請找出 D_{mn} 和 K_{mn} 的數學表達式。(20%)

二、

若 C 代表複平面上的圓 $|z| = 4$, 請計算 $\oint_C \frac{dz}{e^z - e^{-z}} = ?$ (20%)

三、

如圖所示之彈性梁，承受一不連續分布之荷載 $w(x)$ ，根據材料力學理論，

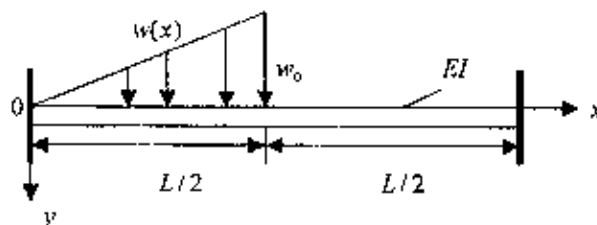
此一梁之撓曲綫 $y(x)$ 之控制方程式為 $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w(x)$

(甲) 請用單位階梯函數(unit step function) $u(t-a) = 0$, $0 \leq t < a$;

$u(t-a) = 1$, $t \geq a$, 表示此一不連續分布之荷載函數 $w(x)$? (5%)

(乙) 此一梁撓曲問題求解之邊界條件是什麼? (5%)

(丙) 請用 Laplace 轉換法，求解此一梁在 $w(x)$ 荷載作用下之撓曲綫 $y(x) = ?$ (10%)



注意：背面有試題

國立中央大學九十一學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 土木工程學系甲組丙組及組科目: 工程數學 共 2 頁 第 2 頁

四、

(甲) 已知函數 $F(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ 在點 $(1, 2, -1)$ 處沿著 Z 軸的方向有最大的方向導數(directional derivative), 其值為 64, 請問 a, b, c 三個常數值分別為何? (9%)

(乙) 請利用 $u = 2xy, v = x^2 - y^2$ 的變數變換, 計算下面的積分值。(15%)

$$\iint_R (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^{1/3} dA \quad \text{其中 } R \text{ 是由 } x=0, x=1, y=0, y=1 \text{ 所圍成的區域。}$$

五、

(甲) 矩陣 A 的伴隨矩陣(adjoint matrix)表示為 $\text{adj}(A)$, 其行列式值表為 $|\text{adj}(A)|$, 請

$$\text{列式計算 } (|\text{adj}(A)|)^3, \text{ 其中 } A \text{ 爲 } \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (8\%)$$

(乙) 已知矩陣 $[A]$ 的特徵值為 1 和 6, 所對應的特徵向量分別為 $\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ 和 $\begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$,

$$\text{其反矩陣的平方可寫成 } ([A]^{-1})^2 = \frac{1}{Q} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ 請問 } a, b, c, d \text{ 和 } Q \text{ 之值為何?}$$

(8%)