

1. (16%)

(1) 試求函數 $f(x)$ 的 Fourier 積分表示

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{for } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{for } x > 2 \end{cases}$$

(2) 應用 (1) 之結果，求

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega (\cos \omega - 1)}{\omega^2} \cos \omega x \, d\omega$$

2. (18%) 樑的振動方程式為

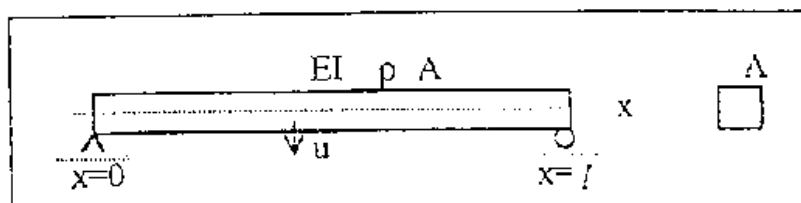
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

其中 $c^2 = EI/\rho A$ ，請求出當初始為靜止，且滿足以下邊界條件

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0$$

的簡支樑的解， $u_0 = F_0(x)G_0(t) = ?$



3. (16%) 請用 Laplace Transform 解以下的初始值問題

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = f(t) = \begin{cases} 5 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

4. (17%) 請用留數定理 (Residue Theorem) 求以下的積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx \quad \text{其中 } b > 0$$

5. (15%) 已知 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ，亦即， $Ax = b$

(1) 求解，

(2) 求 A 的階數 (rank) 與零數 (nullity)，

(3) 求 A 的列空間 (row space)，

(4) 判斷並解釋 b 是否屬於 A 的行空間 (column space)。

6. (18%) 已知 $f(x,y) = e^{x+3y}$ 。在點 $P(0,0)$ 處，

(1) 求 f 沿著 $u = (2,1)$ 的方向導數，

(2) 求 f 的法向導數 (normal derivative)，

(3) 已知 $e^{2z} + 3 = [f(x,y) + 1]^2$ 表示在三度空間中的曲面，求通過點 $(0,0,0)$ 處的切面方程式。

(4) 同 (3)，求通過點 $(0,0,0)$ 的法線與下列直線間的最短距離。

$$y - 3 = z - 5, \quad x = 1$$