定義 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$N(d)=\int_{-\infty}^{d}f(x)\,dx$$

$$c=S\,N(d_1)-Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$d_1=\frac{\ln(S/X)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

其中 $S, X, r, \sigma, T$ 皆為正數

(1) $N(0)=?$ (10分)

(2) 證明 $N(d)=1-N(-d)$ (5分

(3) 證明 $\frac{\partial c}{\partial S}=N(d_1)$ (15分)

(4) $\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}=?$ (5分)

(5) $\frac{\partial c}{\partial r}=?$ (10分)

(6) $\frac{\partial c}{\partial \sigma}=?$ (5分)

注意 (5) (6) 可以表達成 $N(\cdot)$ 的型態來回答

(7) $\lim_{T\to\infty} c=?$ (5分)

(8) $\lim_{S\to\infty}\frac{\partial c}{\partial S}=?$ (5分)

注意：背

(9) $\lim_{T \to 0} C = ?$ (10分)

(10) 證明 C 滿足下列偏微分方程

$$-\frac{\partial C}{\partial T} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$ (

(11) 證明 C 恆為正數。 (10分)

(12) $\lim_{T \to 0} \frac{\partial C}{\partial S} = ?$ (10分)