

(除計算題外, 問答題的答案皆須要有數學證明)

(每題 20 分)

1. 試求二圓柱體 $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + z^2 \leq 1$ 公共部份的體積
2. 半徑為 r 的圓球的體積為 $V(r) = (4/3) \pi r^3$. 試問為何其微分 $V'(x) = 4 \pi r^2$ 為其表面積? 為何邊長為 x 的正立方體的面積函數 $v(x) = x^3$ 其微分 $v'(x) = 3x^2$ 不能表立方體的表面積?
3. 若一函數 F 之二次微分恆為正數, 則利用梯形規則求其定積分的近似值是否恆大於其實際值? 理由為何? 能否找到另一種數值方法求得略小於實際值的近似值? 再利用上述觀察估計 $\ln(2)$ 的近似值使其誤差小於 0.02.
4. 某銀行存款年利率為 5%, 存 n 年後付給客戶的本利和為本金的 $e^{(0.05n)}$ 倍. 問這種條件比逐日計複利優厚嗎? 為甚麼?
5. 若 (a_n) 是一個實數無窮數列且滿足
a. $|a_{n+1} - a_n| < (1/n)$, b. $|a_n| < 1$.
問 (a_n) 是否一定收斂? 為甚麼?