

1. [10%] 計算下列之極限值。

(a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-2}{x+3} \cdot \sin \frac{\pi}{x} \right)$$

2. [15%] 證明下列不等式。

(a) $x^p - 1 \geq p \cdot (x - 1)$ if $p > 1, x > 0$

(b) $e^x > \frac{1}{1+x}$ if $x > 0$

(c) $e^x > 1 + \ln(1+x)$ if $x > 0$

3. [10%] 微分的Mean Value Theorem如下述：

$$\exists c \in (a, b) \text{ such that } f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

假設 $h' > 0$ ，利用此定理證明下式。

$$\exists c \in (a, b) \text{ such that } \frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$$

4. [15%] 計算下列不定積分。

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

(b) $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

(c) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot (x-1)}$

5. [10%] 假設
- $R = \{(x, y) \mid x \geq 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq 16\}$
- ，計算
- $\int_R xy \, dx dy$
- 之值。

6. [10%] 計算
- $0 \leq y \leq x^2$
- 與
- $-1 \leq x < 2$
- 所圍區域繞
- x
- 軸旋轉所形成旋轉體之體積。

7. [10%] 用Taylor展式估計
- $\sqrt{0.9}$
- 至小數點後第四位。

8. [10%] 以固定年利率12%於某月初向銀行貸款十萬元，利息以月複利於每月底計算，若分60期於每月底平均攤還（已還部份不再計息），則每月應還多少錢？

9. [10%] 當一新聞事件發生後，在一群體中聽說此新聞的人數之增加率與該群體中尚未聽說此新聞的人數成正比。假設
- b
- 為此群體之總人數，
- $H(t)$
- 表在時間為
- t
- 時已聽說此新聞之人數，寫出上述關係之微分方程，並解出
- $H(t)$
- 。

參考用