所別：太空科學研究所碩士班 一般生 科目：應用數學

1. 求以下各式之運算結果（如為數列形式，請考慮到無窮多項。）(15%)

(a) $999964 \times 9999928 - 9999999999998 = ?$

(b) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}(\frac{\pi}{6})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 - \frac{1}{7!}(\frac{\pi}{6})^7 + \frac{1}{9!}(\frac{\pi}{6})^9 - \cdots + \cdots\cdots = ?$

(c) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{3}(\frac{\pi}{6})^3 - \frac{1}{4}(\frac{\pi}{6})^4 + \frac{1}{5}(\frac{\pi}{6})^5 - \cdots + \cdots\cdots = ?$

2. 求以下各積分，其中常數$\mu$、$\sigma$、與$L$為大於零的實數，$m$與$n$為大於零的整數 (15%)

(a) $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx$

(b) $I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx$

(c) $I_4 = \int_{-L/2}^{+L/2} \sin(\frac{2\pi mx}{L})\sin(\frac{2\pi nx}{L})dx$

3. 求以下雙曲線函數(hyperbolic function)的一次導來式(the first derivative) $df(x)/dx$，並請分別繪出各函數$f(x)$的曲線圖，其中常數$a$為一個大於零的實數。(10%)

(a) $f(x) = \tanh(x/a)$

(b) $f(x) = \mathrm{sech}(x/a)$

4. (10%)

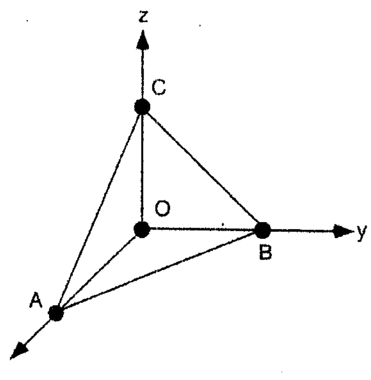
(a) 已知矩陣

$$M = \begin{pmatrix} x^2+1 & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 3x & 1 \end{pmatrix},$$

求此矩陣$M$之反矩陣$M^{-1}$。

(b) 求以下封閉面積分

$$I = \oint\!\!\oint_S (\nabla\phi \times \nabla\psi) \cdot d\vec{a}$$




圖一、題 4(b)中的封閉面積分範圍示意圖

其中 $\phi(x,y,z) = \sin x \cos y \sin z$，$\psi(x,y,z) = \cos x \sin y \cos z$，積分面$S$為圖一中，四面體$ABCO$的表面集合；向量$d\vec{a}$垂直 local 積分面且方向指向外。$ABCO$四點的座標分別為$A=(1,0,0)$，$B=(0,1,0)$，$C=(0,0,1)$，$O=(0,0,0)$。

注意：背面有試題

所別：太空科學研究所碩士班 一般生 科目：應用數學

5. 已知以下各組聯立微分方程組的初始條件為：當 $t=0$ 時，$x=y=0$，$dx/dt=1$，$dy/dt=0$。求以下各聯立微分方程組之解。(20%)

(a) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=x+\frac{dy(t)}{\partial t}\Omega$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=1-\frac{dx(t)}{\partial t}\Omega$$

其中常數 $\Omega>1$。

(b) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+Ax+By=0$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+Bx+Ay=0$$

其中 $A, B$ 為正實數，且 $A>B$。

6. 求以下各微分方程式之通解(10%)。並請舉例說明，什麼樣的初始條件或邊界條件，會與所求得之通解相互矛盾，而造成無解的窘況 (10%)

(a) $$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=0$$

(b) $$y\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+(x^2-2)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

7. 若 $z$ 為複數，$C$ 為複數平面上的一條封閉曲線，而且包圍了 $z=z_0$ 這一點。若函數 $f(z)$ 在封閉曲線 $C$ 上以及它所包圍的範圍內，為一個解析函數(analytical function)，求以下各積分值 (10%)

(a) $$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

(b) $$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$