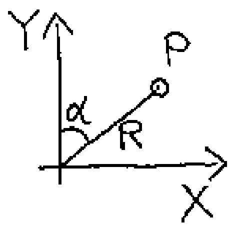
國立中央大學八十九學年度碩士班研究生入學試題卷

95 所別：土木工程學系　庚組　科目：工程數學　共 2 頁　第 1 頁

＊共八題＊

1. 今有一向量 u 與 w 間線性變換式：$u = UVWw$，並已知 W 矩陣為 w 之權(Weight)矩陣，V 為縱行正常的(Column-regular)矩陣，U 為 u 之尺度化協方差(Covariance)矩陣。試證明 $U = (VWV^T)^{-1}$。(10%)

2. 於平面坐標系統內，如圖，點 P 的坐標為 (X_p, Y_p)。試推導微分量 $\dfrac{d\alpha}{dY_p} = \dfrac{-X_p}{R^2}$。



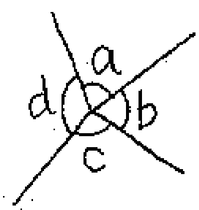
(參考式：$d\sin^{-1}u = 1/\sqrt{1-u^2}\ du$) (10%)

3. 已知角度 α 和 γ，試驗證此 3×3 旋轉矩陣：

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

為一正交(Orthogonal)矩陣。(10%)

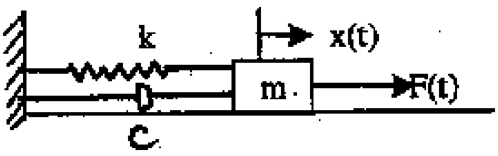
4. 獨立等權觀測四個角度(見附圖)，請用最小二乘(Least-squares)原理，求解該觀測量之殘餘誤差。(10%)



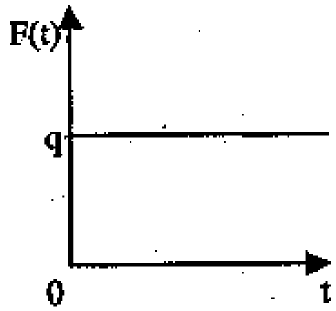
5. 正方矩陣 X，已知其行列式不等於零，I 為單位矩陣，則試證明：$X(I+X)^{-1} = (I+X)^{-1}X$。(10%)

參

6. 如圖(1a)所示之彈簧一阻尼一質量塊系統，其中 k 爲彈簧勁度，c 爲阻尼係數，m 爲塊体之質量。此一系統初始時爲靜止，然後承受一如圖(1b)所示之荷載 F(t)。此塊体之運動方程可表成 $\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2 x=\frac{F}{m}$。並且此一系統爲低阻尼系統，也就是 $c^2<4mk$ 或 $\xi=\frac{c}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}<1$。請求解塊体之變位 x(t)? (20%)



圖(1a)



圖(1b)

7. 已知矩陣 A 之部份元素的值:

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & -1 & a\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & b\end{bmatrix},\ \text{又已知}\ A^{-1}=\frac{1}{6}(-A^2+2A+5I)$$

請求出矩陣 A 中待定之常數 a, b? (15%)

8. 請在柱坐標系統下，求取以下之積分

$\oint_c \vec{V}\bullet d\vec{R}=?$

其中 $\vec{V}=-r^2\cos\theta\vec{e}_r+r^2\vec{e}_\theta+r\sin\theta\vec{e}_z$，$C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4\cup C_5$

而圖中 $S=S_1\cup S_2$ 爲 C 所圍成之曲面，S_1 爲在 z=3 之半徑爲 2 之 1/4 圓，S_2 爲 1/4 圓筒面，C_2 爲 1/4 半徑爲 2 之圓弧。(15%)