

一、已知三維空間的平面方程式為 $ax+by+cz+d=0$ 。該平面外某點 (u, v, w) 到平面之垂距應為 $\frac{au+bv+cw+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ，試列式驗證之。(十五分)

二、設隨機 y 變量的常態密度函數為 $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ，其中記號 (μ, σ) 分別表示變量 y 的平均值與標準差參數。試求該 $g(y)$ 函數反曲點之 y 坐標。(二十分)

三、三維直角坐標系中，兩個不同的向量 (x_1, x_2, x_3) 和 (y_1, y_2, y_3) ，經叉積或向量積所得的結果為 (z_1, z_2, z_3) 。試列式敘明， $x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3=0$ 及 $y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3=0$ ，代數為零之理。(十五分)

四、請解下列聯立方程式(列出詳細計算)：

$$(1) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \text{ 請計算 } x_1 \text{ (用 } a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2 \text{ 表示)}. \text{ (十五分)}$$

$$(2) \begin{bmatrix} A_{1 \times 1} & B_{1 \times 2} \\ C_{2 \times 1} & D_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1 \times 1} \\ Y_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1 \times 1} \\ T_{2 \times 1} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } A, B, C, D, X, Y, S, T \text{ 皆是矩陣，下標表示}$$

矩陣的列數與行數，請計算 X (用 A, B, C, D, S, T 表示)。 (十五分)

五、請解下列微分方程式(a, b 為實數，列出詳細計算)：

$$(1) x^2 y'' + 2xy' - 2y = a - bx^2 \text{ (十分)}$$

$$(2) y'' + ay' + by = x \text{ (十分)}$$