國立中央大學104學年度碩士班考試入學試題

所別：土木工程學系碩士班 結構組(一般生)　科目：工程數學　共 1 頁　第 1 頁

本科考試禁用計算器　　＊請在答案卷（卡）內作答

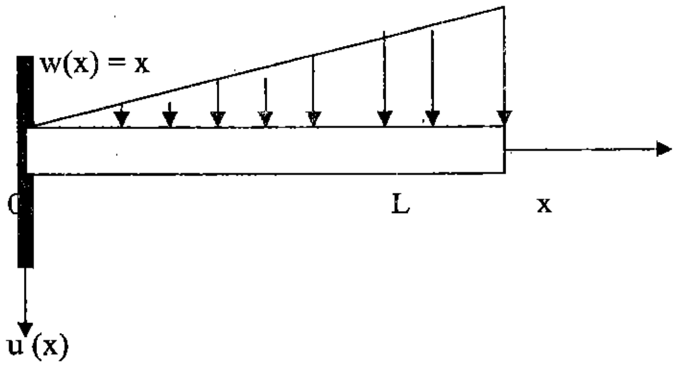
參考用

1) 如下圖所示之彎曲剛度為 EI 之懸臂梁，在 0 <x<L，承受一荷載 w(x) = x，當 x>L 時 w(x)=0。此一梁撓曲變形 u(x)之控制方程為

$$EI\frac{d^4u}{dx^4} = w(x)$$

邊界條件為 $u(0) = du/dx(0) = d^2u(L)/dx^2 = d^3u(L)/dx^3 = 0$

請用 Laplace 轉換求解此一梁之撓曲變形 u(x)=?



(25%)

2) 請求解以下聯立微分方程

$$2\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_2}{dt}-\frac{dy_3}{dt}=0$$

$$\frac{dy_1}{dt}+\frac{dy_2}{dt}=4t+2 \qquad y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=0$$

$$\frac{dy_2}{dt}+y_3=t^2+2$$

(25%)

3) 設 $A=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ 和 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為 2×2 矩陣，A^{-1} 為 A 的反矩陣，而且 A 滿足等式

$$A^3=(x^2+y^2+2)\cdot f(x,y)\cdot I+(x^2+y^2+xy+1)\cdot g(x,y)\cdot A^{-1}$$

請利用 Cayley-Hamilton 定理或其他方法求出純量函數 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的表示式。(25%)

4) 設 $A=\frac{\pi}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $B=\sin A$ 皆為 2×2 矩陣，令 $\vec{u}=B\vec{v}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$，$\vec{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$f(x,y)=u_1^2+u_2^2$。

$D_{\vec{a}}f\Big|_{(2,1)}$ 代表 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(2,1)$ 點上沿 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ 方向變化的方向微分 (Directional Derivative)，請計算 $D_{\vec{a}}f\Big|_{(2,1)}$ 的值。(25%)