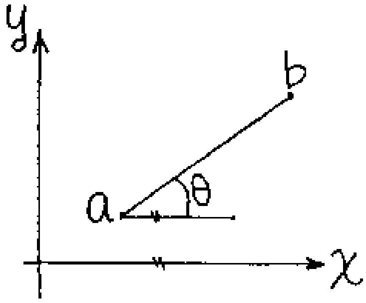
國立中央大學八十五學年度碩士班研究生入學試題卷

所別：土木工程研究所　庚組　科目：工程數學　共 2 頁 第 1 頁

共分(甲)(乙)兩部份，各佔 50%。

(甲) 1. 如圖所示，$\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{y_b - y_a}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}\right)$。已知微分



式 $\dfrac{d\sin^{-1}u}{du} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$；試導出約化後 $\dfrac{\partial\theta}{\partial y_a}$ 之關係式。(10%)

2. 變數 z 為相關隨機變數 x 與 y 之線性組合(α 和 β 為係數)：$z = \alpha x + \beta y$。試應用誤差傳播定理，列出 z 變方之一般關係式。(5%) 當 $x = y$，$\alpha = -\beta = 1$ 時，z 的變方又是多少？(5%)

3. 有一平面直角三角形，斜邊長 2m，直角鄰邊之一長 1m，請証明此兩邊之夾角等於 60°(不接受逆三角函數之引証)。(5%)

4. 試推導平面多邊形外角總和之計算式。(5%)

5. 矩陣 $\underline{A}$ 與 $\underline{B}$ 皆是正方及滿秩的，試驗証逆矩陣關係式
① $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$；(5%) ② $(\underline{A}+\underline{B})^{-1} = \underline{A}^{-1}(\underline{A}^{-1}+\underline{B}^{-1})^{-1}\underline{B}^{-1}$。(5%)

6. 直角坐標系統內 n 維橢球體的描述式：$\underline{y}^T\underline{A}\,\underline{y} = g$。其中 $\underset{n,1}{\underline{y}}$ 表示向量；$\underset{n,n}{\underline{A}}$ 為實數對稱矩陣；g 乃一常量。此外，$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 為 $\underline{A}$ 的特徵值，其所對應的特徵向量，則組成一正交矩陣 $\underline{X}$。按坐標系統之轉換：$\underline{y} = \underline{X}\,\underline{z}$，可推得主軸形式的 n 維橢球體描述式：$\dfrac{z_1^2}{g/\lambda_1} + \dfrac{z_2^2}{g/\lambda_2} + \cdots + \dfrac{z_n^2}{g/\lambda_n} = 1$。試列出式子推導的過程。(10%)

(乙)

(10%) 1. 請算出以下空間中二條直線間之最短距離

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

$$L_2: \frac{x-4}{-4} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+2}{1}$$

(15%) 2. 請用 Laplace 變換求解以下之初始值問題

$$y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$$

$$y(0)=1, \; y'(0)=0$$

(15%) 3. 請運用以下矩陣 A 所對應之單位化特徵向量 (normalized eigenvector) 將向量 $\underset{\sim}{x} = (2, 0, 1)^T$ 展開。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(10%) 4. 求 α 值使得以下之矩陣具有逆矩陣

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$$