國立中央大學 110 學年度碩士班考試入學試題

所別： 機械工程學系 碩士班 系統組(一般生) 共3頁 第1頁

科目： 工程數學(含程式設計) ※計算題需計算過程，無計算過程者不予計分

本科考試可使用計算器，廠牌、功能不拘 ＊請在答案卷(卡)內作答

1. Find the solutions for ordinary differential equations. (ODE)

(a) **(5%)** Find the solution for $y''-3y'-4y=0,\ y(0)=2, y'(0)=1$

(b) **(5%)** Find the solution for $x^2y''+2xy'-6y=0,\ y(1)=0.5, y'(1)=1.5$

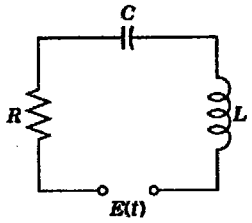
(c) **(5%)** Find a basis of solutions by the Frobenius method of the following ODE:

$(x+1)^2y''+(x+1)y'-y=0.$

2. Modeling an *RLC*-circuit and obtain steady-state current.

Kirchhoff's Voltage Law says that the voltage drop in a closed-loop circuit is zero.

(a) **(5%)** Based on this law, model the current, $i(t)$, for the circuit shown in the following figure.



(b) **(5%)** Obtain the "steady-state" current in the *RLC*-circuit when R=50 Ω (Ohm), L = 30 H (Henry), C = 0.025 F (Farad) , and $E = 200\sin(4t)$ V (Volt)

Hint: The voltage drop for a current $i(t)$ across a resistor of resistance R is $Ri(t)$, across an inductor of inductance L is $L\frac{di}{dt}$, and across a capacitor of capactiance C is Q/C, where Q is the charge and the relation between $Q(t)$ and $i(t)$ is $Q(t) = \int i(t)dt$.

3. (5%) Determine the existence and uniqueness of the solutions to the system

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

注意:背面有試題

所別： 機械工程學系 碩士班 系統組(一般生)　　共3頁 第2頁

科目： 工程數學(含程式設計)

本科考試可使用計算器，廠牌、功能不拘　　＊請在答案卷(卡)內作答

4. (5%) The traffic flow problem can be described by the following table. Please determine the general flow pattern for the network

Intersection	Flow in	=	Flow out
A	300+500	=	x_1+x_2
B	x_2+x_4	=	$300+x_3$
C	100+400	=	x_4+x_5
D	x_1+x_5	=	600

5. (a) **(3%)** Let $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, $u=\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix}$, and $v=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$, Are u and v eigenvectors of A?

(b) **(4%)** Show that 7 is an eigenvalue of matrix A in **(a)**, and find the corresponding eigenvectors.

(c) **(8%)** Find a formula for A^k, $k \geq 1$ (Hint: given that $A= PDP^{-1}$, P and D matrix can be obtained from eigenvectors and eigenvalues of matrix A)

6. (10%) Let $f(t)$ be a periodic function, $f(t)=f(t+p)$ with period p. Denote $L[f(t)]$ as the Laplace transform of $f(t)$. Prove $L[f(t)]=\frac{\int_0^p e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sp}}$.

7. Definition: The Fourier series expansion of a function $f(t)$ is given by

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(n\omega_0 t)+b_n sin(n\omega_0 t)], \omega_0=\frac{2\pi}{T}. \quad (1)$$

Function $f(t)$ is given by $f(t)=\begin{cases}0, 0\leq t<\pi\\ 2, \pi\leq t<2\pi\end{cases}$ and $f(t)=f(t+2\pi)$. Expand $f(t)$ by Fourier series.

(a) **(3%)** Find the (fundamental) period T of $f(t)$.

(b) **(4%)** Find the values of a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

(c) **(3%)** Will the Fourier series converge to $f(t)$? Explain your reasons within 30 words.

(d) **(5%)** Can one obtain identical Fourier series of any function $g(t)$ by using $2T$ and T in Equation (1)? Explain your reasons within 30 words.

注意：背面有試題

所別： 機械工程學系 碩士班 系統組(一般生)　　

科目： 工程數學(含程式設計)

本科考試可使用計算器，廠牌、功能不拘　　＊請在答案卷(卡)內作答

8. Programming

(a) **(10%)** 數學中常用的π可用下列無窮數列來計算：

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots$$

吾人可藉由計算數列的一項、二項、三項和...，來求得π的近似值。試寫一程式，以迴圈方式計算至n項和之π的近似值，並將結果儲存於變數 result 中。程式碼限定以 C、C++、Visual Basic 或 Fortran 撰寫，除迴圈變數以整數宣告外，其餘所有變數均以實數宣告，並在答案卷上註明使用的程式語言。

(b) **(15%)** 質數是指一個只能被 1 和自己整除的整數。埃拉托斯特尼篩法是一種找出質數的方法。下列以程式語言來解釋其概念：

1. 產生一個陣列，把所有元素的初始值均設為 1(真)。之後下標(Index)確定為質數的陣列元素值保持為 1，所有其他不是質數的陣列元素最終會被設為 0 。

2. 由陣列下標 2 開始(因為 1 不是質數)，每一次找到值為 1 的陣列元素，便往陣列的後方操作，只要下一個下標是目前下標的倍數，便將其所對應的陣列元素設定為 0。例如：有一陣列 Prime，對於陣列下標 2，要讓所有 2 的倍數的陣列元素值為 0，即 Prime[4]=0、Prime[6]=0、Prime[8]=0,.....。對於陣列下標 3，要讓所有是 3 的倍數的陣列元素值為 0，即 Prime[6]=0、Prime[9]=0、Prime[12]=0,.....。

3. 當上述程序結束之後，陣列元素中仍然為 1 者，表示其下標值是個質數。

請撰寫一個程式，使用 500 個元素的陣列來判斷質數，最後在螢幕上顯示 1~499 之間的質數，其中元素 0 不要使用。不需實際算出，只要寫出程式碼，限定以 C、C++、Visual Basic 或 Fortran 撰寫，所有變數均以整數宣告，並在答案卷上註明使用的程式語言。