

1. (a) 求 $\int x^3 e^{2x} dx$ (20%)

(b) 求 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中 D 為由圓 $x^2+y^2=1$ 之外與圓 $x^2+(y-1)^2=1$ 之內所圍區域。

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ (10%)

3. 在 $xyz=1000$ 條件下, 求函數 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xyz$ 之最大值與最小值。(10%)

4. 求由 $y=|x^2-1|$ 和 $y=2$ 所圍成的區域的面積 (10%)

5. 若 $w=f(x,y,z)$, $y=g(x,u)$ 和 $z=h(x,v)$, 求 $\frac{\partial w}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial u}$ (10%)

6. (a) 試敘述泰勒公式 (Taylor formula)

(b) 試列舉三種泰勒公式的應用時機 (10%)

7. (a) 試定義梯度 (gradient), 並說明其意義及與方向導數的關係。

(b) 若 $z=f(x,y)$ 為一高度函數, 試說明梯度與等高線的關係。(10%)

8. 求級數 $\frac{x}{10^2} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{10^4} + \frac{x^4}{10^3} + \frac{x^5}{10^6} + \frac{x^6}{10^5} + \dots$ 的收斂區間 (5%)

9. 一函數 $w=f(x,y,z)$, 若滿足 $f(tx, ty, tz) = t^n f(x,y,z)$, $t > 0$, 則稱此函數為 n 次齊次函數 (homogeneous of degree n).

(a) 設 $f(x,y,z)$ 為 n 次齊次函數, $n \neq 0$, 且 f 不為常函數 (constant function)

試證 $f_1(x,y,z)$ 為 $n-1$ 次齊次函數

(b) 設 $f(x,y,z)$ 為 n 次齊次函數, 試證

$$x f_1(x,y,z) + y f_2(x,y,z) + z f_3(x,y,z) = n f(x,y,z)$$

(c) 設 $f(x,y,z)$ 在 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ 時為可微分函數, 且滿足

$$x f_1(x,y,z) + y f_2(x,y,z) + z f_3(x,y,z) = n f(x,y,z)$$

試證 $f(x,y,z)$ 為 n 次齊次函數

(註: $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$)

參考用