0.2

國立中央大學94學年度碩士班考試入學試題卷　共 2 頁 第 1 頁

所別：數學系碩士班 乙組(一般生) 科目：數值分析

1. (20 *points*) 這一題要導出 Simpson 數值積分法的基礎公式，並估計其誤差。令 $p(x)$ 是一個三次多項式，請找出參數 α_0, α_1 和 α_2 使得

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \alpha_0 p(-1) + \alpha_1 p(0) + \alpha_2 p(1)$$

令 $h > 0$ 且 $[a,b] = [c-h, c+h]$，若 $f(x) \in C^4([a,b])$，請證明

$$\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(c) + \alpha_2 f(b) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + O(h^5)$$

2. (20 *points*) 這一題要證明牛頓法計算二次可微函數之單根是二階收斂。令 r 是 $f(x) = 0$ 的一個單根 (simple root)，$r \in (a,b)$，$f''(x)$ 在 (a,b) 內存在且連續。令 $x_0 \in (a,b)$ 是牛頓法的初始猜想，請寫出牛頓法的迭代公式。此公式將計算出一個數列 $x_1, x_2, \cdots$，假設所有的 $x_n \in (a,b)$。令 x_n 的誤差為

$$e_n = x_n - r, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

證明

$$e_{n+1} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

您可以利用 $f(x)$ 以 r 為參考點的二階泰勒展開來證明

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi_n)\, e_n^2$$

其中 ξ_n 是某個介於 x_n 和 r 之間的數。最後，請證明

$$e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\, e_n^2$$

3. (20 *points*) 令 A 是一個對稱 (symmetric) 且正定 (positive definite) 的 $n \times n$ 方陣。則存在一個上三角方陣 R 使得 $A = R^T R$，其中 R^T 代表 R 的轉置 (transpose) 方陣。若已知 $A = (a_{ij})$，請描述一個計算 $R = (r_{ij})$ 的演算法 (algorithm)。不必寫成程式語言的形式，可以用數學符號來描述這個演算法。

4. (20 *points*) 請轉換十進制的 0.1 也就是 $\frac{1}{10}$ 為二進制循環小數。然後將它寫成二進制的科學記號，亦即

$$1.b_1 b_2 b_3 \ldots \times 2^p$$

的形式，其中 $b_i \in \{0, 1\}$ 而 p 可以用十進制整數表達。如果 $x = 1.b_1 b_2 b_3 \ldots \times 2^p$，我們規定 x 的雙精度浮點數為

$$f\ell(x) = (1.b_1 b_2 b_3 \ldots b_{52} + 2^{-52} f) \times 2^p$$

其中

$$f = \begin{cases} 1 & \text{若 } 0.b_{53}b_{54}\ldots < 1/2 \\ 0 & \text{若 } 0.b_{53}b_{54}\ldots > 1/2 \\ 1 & \text{若 } 0.b_{53}b_{54}\ldots = 1/2 \text{ 且 } b_{52} = 1 \\ 0 & \text{若 } 0.b_{53}b_{54}\ldots = 1/2 \text{ 且 } b_{52} = 0 \end{cases}$$

請寫出 $f\ell(1/10)$。然後寫出

$$f\ell(10 \times f\ell(1/10))$$

的計算結果。這一題裡面寫的整數都是十進制數字，例如 10 表示「十」。

注意：背面有試題

所別：數學系碩士班 乙組(一般生) 科目：數值分析

5. (20 *points*) 請寫出以下極限的值：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

以雙精度浮點數 (double precision floating point numbers) 計算，代入的 x 與得到的函數值對應如下：

x	$(x-\sin x)/x^3$
0.10000000000000	0.16658335317185
0.01000000000000	0.16666583333574
0.00100000000000	0.16666665833900
0.00010000000000	0.16666666148319
0.00001000000000	0.16666728489944
0.00000100000000	0.16665373237228
0.00000010000000	0.17205356741103
0.00000001000000	0
0.00000000100000	0

請解釋上述數值計算的現象。