國立中央大學105學年度碩士班考試入學試題

所別： 天文研究所 碩士班 不分組(一般生)
天文研究所 碩士班 不分組(在職生)

科目： 應用數學

本科考試禁用計算器

*請在答案卷(卡)內作答

1. (20分) 已知積分公式

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

a) (5分) 請問

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = ?$$

b) (5分) 對 $z > 0$ 伽瑪函數 (Γ function) $\Gamma(z)$ 的定義爲

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

請問 $\Gamma(\frac{1}{2}) = ?$

c) (10分) 試證明對正整數 n,

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{2n-1}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

2. (20分) 請證明以下二則等式, 其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 爲向量

a) (10分)

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

b) (10分)

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})$$

3. (20分) 如果勒讓得方程式 (Legendre equation) 爲

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0$$

$P_n(x)$ 爲滿足該方程式的勒讓得函數 (Legendre function)。試證明當$m \neq n$時,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

4. (20分) 證明如果一個矩陣 $\mathbf{A}$ 有一個特徵向量(eigenvector) $\mathbf{V}$ 其對應的特徵值 (eigenvalue) 爲 λ, 則其反矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 也有相同的特徵向量, 而其對應的特徵值爲 λ^{-1}。

5. (20分) 對於一個偏微分方程式

$$A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

其中 A_i 是 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 的函數。試證明

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n}。$$