

# 國立中央大學八十六學年度轉學生入學試題卷

科目:

微積分

共一頁 第 頁

數學系 物理學系 大氣科學系 地球科學系 化學工程學系 土木工程學系  
機械工程學系 電機工程學系 資訊工程學系 轉學者微積分試題(理工學院)

一、填空：每格5分共60分

1.  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{\sin x^2} \frac{t}{4+t^2} dt = \underline{(1)}$ 。

2.  $\frac{d}{dx} (x^2+1)^{\sin x} = \underline{(2)}$ 。

3.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x - \cos x - 1} dx = \underline{(3)}$ 。

4. 由  $r = 2 \sin \theta$  圍成的區域為  $R$ , 由  $r = \frac{3}{2} - \sin \theta$  圍成的區域為  $S$ ,  $R \cap S$  的面積為 (4)。

5.  $g(x) = \frac{3^{\cos x} - 3}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \underline{(5)}$ 。

6.  $\int_1^e x^2 (\ln x)^2 dx = \underline{(6)}$ 。

7.  $f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{3-x^2} + \frac{3}{2} \sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3} x)$ ,  $x \in [1, 2]$ , 當  $x$  由  $x=1$  到  $x=2$ ,  $(x, f(x))$  在平面上所畫出的曲線的弧長 = (7)。

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = \underline{(8)}$ 。

9.  $f(x) = \ln(1-x^2)$ ,  $x \in (-1, 1)$ ,  $f(x)$  的泰勒展開式  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  為 (9)。

10. 設  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  則  $\iint_{\Omega} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy = \underline{(10)}$ 。

11. 由  $(x^2+y^2+z^2) = 2z(x^2+y^2)$  和  $xy$  平面所圍住的實體其體積為 (11)。

12. 設  $\Omega$  為由  $x^2+y^2=4$ ,  $x^2+y^2=9$ ,  $x^2-y^2=1$ ,  $x^2-y^2=4$  所圍成的區域, 則  $\iint_{\Omega} xy dx dy = \underline{(12)}$ 。

二、畫圖：10分

畫出  $f(x) = (x^2-4)^{\frac{3}{2}}$  的圖形, 您必須討論  $f(x)$  的定義域, 值域, 相對極大點, 相對極小點, 反曲點及漸近線。

三、計算：10分

(a)  $f(x, y) = xy - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$ , 找出  $f(x, y)$  的相對極值及馬鞍點。(5分)

(b) 在  $6x+4y+3z-24=0$  之條件下求出  $f(x, y, z) = xyz$  的最大值。(5分)

四、敘述定理內容：(a) 中間值定理。(2分) (b) ROLLE'S 定理。(2分) (c) 均值定理。(2分)

10分 (d) 積分第一-均值定理。(2分) (e) 積分第二-均值定理。(2分)

五、證明：10分

用極限基本定義證明若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$  且  $M \neq 0$  則  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{M}$ 。

參考